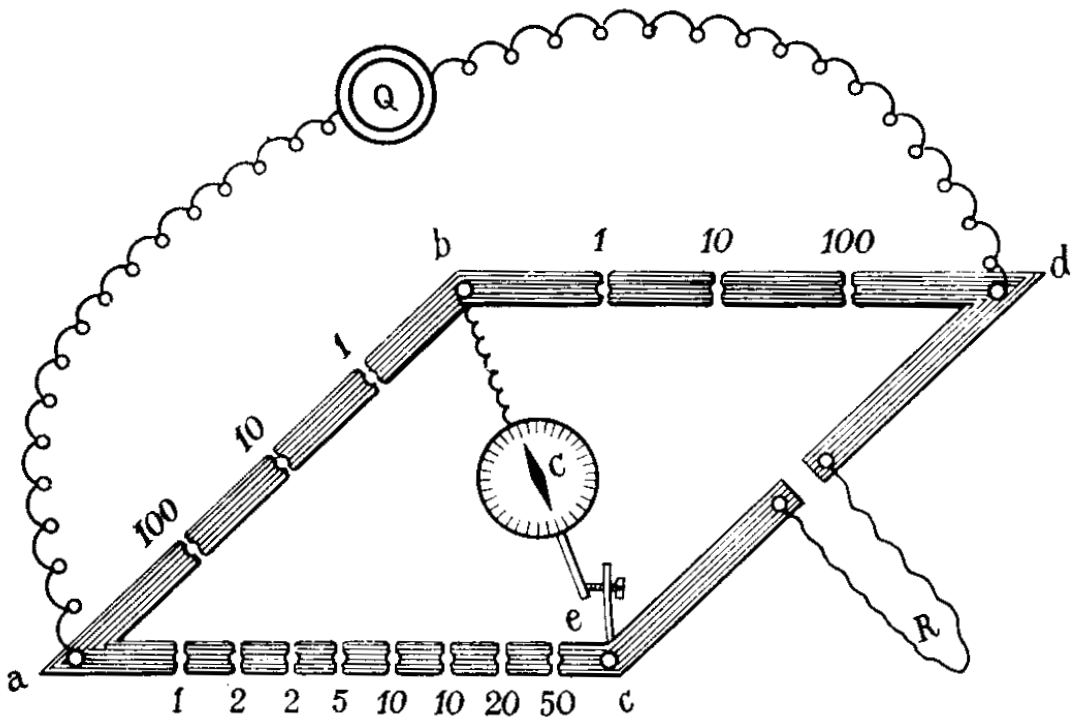


FYZIKÁLNE MERANIA

J. Uhrin, L. Ševčovič, J. Murín



Technická univerzita v Košiciach
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra fyziky

FYZIKÁLNE MERANIA

Ján Uhrin
Ladislav Ševčovič
Jozef Murín

Vydavateľstvo *elfa*, s. r. o.
Košice 2006

FYZIKÁLNE MERANIA

Ján Uhrin
Ladislav Ševčovič
Jozef Murín

Prvé vydanie 2006

© Ján Uhrin, Ladislav Ševčovič, Jozef Murín, 2006

Obrázok na titulnej strane:

Faksimile dobovej kresby mostíka na meranie odporov, ktorý zostrojil
v r. 1843 anglický fyzik Charles Wheatstone.

Recenzovali: Doc. RNDr. Pavol Petrovič, CSc.

Doc. RNDr. Dušan Olčák, CSc.

Za odbornú náplň tohto vysokoškolského učebného textu zodpovedajú autori. Sadzbu a zalomenie do strán previedol LADISLAV ŠEVČOVIČ typografickým systémom \TeX použitím formátu pdf \mathcal{C}_S - \LaTeX , písma Palatino, balíkov formátu $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - \LaTeX a iných softvérových balíkov z projektu UBUNTU GNU/Linux. Grafy boli vytvorené v programovom prostredí MATLAB 7[®].

ISBN 80-8086-032-7

OBSAH

PREDSLOV	iv
Z1 Určenie objemu valca z jeho rozmerov	27
Z2 Meranie polomeru guľovej plochy sférometrom	30
G1 Meranie tiažového zrýchlenia jednoduchým kyvadlom	33
G2 Meranie tiažového zrýchlenia reverzným kyvadlom	36
G3 Určenie momentu zotrvačnosti fyzikálnym kyvadlom	40
G4 Určenie modulu pružnosti v šmyku metódou torzného kyvadla	42
G5 Určenie modulu pružnosti v ťahu	45
G8 Určenie dynamickej viskozity kvapaliny Stokesovou metódou	49
T3 Meranie hmotnostnej tepelnej kapacity tuhých látok	54
T4 Meranie hmotnostného skupenského tepla topenia	59
T6 Meranie koeficientu teplotnej rozpínavosti plynu	63
T7 Určenie izentropického exponentu vzduchu	66
T8 Určenie Boltzmannovej konštanty	69
E1 Mapovanie elektostatického poľa	72
E6 Meranie teplotného koeficientu odporu	75
E8 Meranie termoelektrického napätia v závislosti od teploty	78
E12 Určenie náboja elektrónu z charakteristiky tranzistora	81
E14 Overenie Stefanovho-Boltzmannovho zákona (bez použitia pyrometra)	85

E15	Overenie Stefanovho-Boltzmannovho zákona (s použitím pyrometra)	89
E16	Určenie hmotnostného náboja elektrónu magnetrónom	93
E18	Rezonancia v sériovom <i>RLC</i> obvode	98
E19	Určenie hmotnostného náboja elektrónu	101
M3	Meranie vlastnej a vzájomnej indukčnosti striedavým prúdom	105
M6	Meranie indukcie magnetického poľa solenoidu	109
M8	Meranie rýchlosti zvuku vo vzduchu	113
O5	Spektrálna analýza. Určenie Rydbergovej konštanty	116
Q1	Overenie de Broglieho hypotézy	120
Q2	Určenie Planckovej konštanty z fotoelektrického javu	125
NIEKTORÉ UŽITOČNÉ VZŤAHY		128
ZÁKLADNÉ JEDNOTKY SÚSTAVY SI		130
ZÁKLADNÉ FYZIKÁLNE KONŠTANTY		131
CHYBY ELEKTRICKÝCH MERACÍCH PRÍSTROJOV		133
LITERATÚRA		137

PREDSLOV

Nikdy sa nepokúšaj zopakovať úspešný experiment.

FETTOV LABORATÓRNY ZÁKON

Žiaden experiment nie je úplne zbytočný. Vždy sa dá použiť ako negatívny príklad.

FAKTOR ZBYTOČNOSTI

Obsahom predkladanej učebnice sú návody k meraniam laboratórnych úloh zo základného kurzu fyziky, ktorý sa prednáša na všetkých fakultách Technickej univerzity v Košiciach. Súčasne táto učebnica obsahuje úvodné state obsahujúce zásady potrebné na vykonanie a spracovanie laboratórnych cvičení. V súlade s tradíciou a koncepciou laboratórnych cvičení na Katedre fyziky FEI TU v Košiciach tento výber zahŕňa cvičenia z rôznych oblastí fyziky, pričom pred každou úlohou je skratka označenia, ktorá potom slúži pri rozpise na jednotlivé týždne v danom semestri.

Pri zostavovaní učebnice sme využili aj dlhoročné skúsenosti kolektívu pracovníkov Katedry fyziky FEI TU v Košiciach a skúsenosti získané používaním predchádzajúcich skrípt k laboratórnym cvičeniam na našej katedre. Ukázalo sa, že ako teoretický základ na úspešné vykonanie laboratórneho cvičenia vo väčšine prípadov postačuje uviesť definíciu meranej veličiny, fyzikálne vzťahy, ktoré ju určujú a ktoré sú pri meraní použité. Dôraz sme kládli na jednoznačné vymedzenie úlohy merania, na postup pri meraní, na spracovanie a vyhodnotenie nameraných hodnôt.

Na webovej stránke <http://www.tuke.sk/sevcovic> sú prístupné zdrojové súbory na spracovanie dát programom MATLAB k úlohám, ktoré si vyžadujú použitie metódy najmenšieho súčtu štvorcov odchýliek alebo hľadania lokálneho extrému. Na tejto adrese sú uvedené metódy opísané aj pre tabuľkový procesor EXCEL¹.

Naša vďaka patrí Pavlovi Petrovičovi, Dušanovi Olčákovi a Jánovi Bušovi za starostlivé prečítanie rukopisu a cenné pripomienky, ktoré prispeli k spresneniu niektorých formulácií a ku skvalitneniu tejto publikácie.²

Autori

Moja vďaka patrí Igorovi Leššovi za rady a upresnenia tých častí učebnice, ktoré sú zamerané na merania elektro-fyzikálnych veličín. Chcem sa tiež poďakovať mojim kolegom, ktorí mi pomohli námetmi na vylepšenie textu a za upozornenia na nedopatrenia a chyby.

Košice 2006

L. Ševčovič

¹ V operačnom systéme GNU/Linux je program Gnumeric plnohodnotnou náhradou za MS EXCEL z balíka MS OFFICE.

² Pripomienky a návrhy, ktoré pomôžu vylepšiť ďalšie vydanie učebnice, zasielajte na adresu: Doc. Ing. Ján Uhrin, CSc. (Jan.Uhrin@tuke.sk) alebo RNDr. Ladislav Ševčovič (Ladislav.Sevcovic@tuke.sk), Katedra fyziky, FEI, Technická univerzita v Košiciach, Park Komenského 2, 041 20 Košice.

E12 URČENIE NÁBOJA ELEKTRÓNU Z CHARAKTERISTIKY TRANZISTORA

Úlohy merania

1. Namerať a graficky znázorniť závislosť $\ln U_R = f(U_{EB})$.
2. Z nameraných hodnôt určiť náboj elektrónu metódou najmenších štvorcov, výsledok ohodnotiť štandardnou neistotou.
3. Porovnať hodnoty náboja určeného meraním s tabuľkovou hodnotou.

Teoretický základ

Jednou z metód nepriameho určenia náboja elektrónu¹⁷ je meranie voltampérovej (VA) charakteristiky polovodičového $p-n$ priechodu. Táto metóda predpokladá meranie závislosti prúdu I tečúceho priechodom od napätia U pripojeného na priechod. Na meranie tejto VA charakteristiky je však výhodnejšie použiť tranzistorový $p-n$ priechod emitor–báza v zapojení so spoločným emitorom.

¹⁷Základ k objaveniu elektrónu položil v roku 1833 anglický fyzik *Michael Faraday* svojimi zákonmi o elektrolýze. V roku 1897 anglický fyzik *Sir Joseph John Thomson* podal dôkaz o existencii voľných elektrónov, keď identifikoval katódové lúče ako prúd záporne nabitých častíc a určil ich merný náboj $m/e = 1,3 \cdot 10^{-11}$ kg/C meraním odklonu lúčov v magnetickom a elektrickom poli. Analogickú metódu, ako *Thomson*, použil na určenie merného náboja elektrónu v rokoch 1896 až 1898 nemecký fyzik *Walter Kaufmann*, nameril hodnotu $m/e = 0,54 \cdot 10^{-11}$ kg/c. Írsky fyzik *George Johnstone Stoney* na základe Faradayových zákonov elektrolýzy v r. 1874 prvýkrát odhadol minimálnu hodnotu elementárneho náboja $\sim 10^{-20}$ C. *Stoney* v r. 1894 uverejnil prácu s názvom *O „elektróne“ alebo o atóme elektriny*, čím sa zrodil termín *elektrón* pre elementárny náboj (elektrónom nazýval záporný náboj jednovalentného iónu). V r. 1903 *Thomsonov* žiak škótsky fyzik *Charles Thomson Rees Wilson* robil pokusy v hmlovej komore medzi doskami kondenzátora; komoru skonštruoval už v r. 1895. Získal hodnotu náboja elektrónu $1,03 \cdot 10^{-19}$ C. Americký fyzik *Robert Andrews Millikan* po mnohoročnom úsilí od r. 1897 experimentálne stanovil v r. 1911 náboj elektrónu $e = (-1,616 \pm 0,003) \cdot 10^{-19}$ C. V rokoch 1906 až 1914 určoval strednú hodnotu elementárneho náboja zo strát a ziskov elektrónov jedinej kvapky oleja. Podobným spôsobom zmeral v r. 1912 ruský fyzik *Abram Fiodorovič Ioffe* náboj elektrónov uvoľňovaných pri fotoelektrickom jave.

Tranzistor¹⁸ v elektrických obvodoch môžeme uvažovať ako štvorpól, v zásade však vždy ako nelineárny prvok. Z fyzikálneho hľadiska je tranzistor značne zložitý prvok, ktorého vlastnosti sa snažíme opísať náhradnými schémami. Náhradné fyzikálne modely (obvody) majú výhodu v prehľadnosti a vo všestrannej použiteľnosti. J. J. Ebers a J. L. Moll (1954) zostavili sústavu rovníc pre napätia a prúdy podľa jednoduchej predstavy o *npn* tranzistore, ako o kombinácii dvoch za sebou zapojených priedchodov *p-n*. Tranzistorový jav vznikne, keď sú dva *p-n* priedchody v takej tesnej blízkosti, že nosiče náboja jedného *p-n* priedchodu, polarizovaného v priamom smere, ovplyvňujú závernú schopnosť druhého *p-n* priedchodu, polarizovaného v závernom smere. Charakteristickým znakom činnosti tranzistora je odvádzanie menšinových nosičov priedchodom kolektor–báza skôr, ako môžu rekombinovať. Tranzistor však môžeme zapojiť aj inverzne tak, že priedchod kolektor–báza dodáva nosiče a priedchod emitor–báza ich odvádza.

Statické charakteristiky plošného (bipolárneho) tranzistora, ako výsledok tranzistorového javu sa vyjadrujú analyticky na základe diódových (*Shockleyových*) rovníc pre emitorový a kolektorový priedchod. Závislosť emitorového prúdu I_{DE} od napätia U_{EB} emitorového priedchodu vyjadruje vzťah

$$I_{DE} = I_{ET} \left(e^{\frac{eU_{EB}}{k_B T}} - 1 \right) \quad (117)$$

a závislosť kolektorového prúdu I_{DK} od napätia U_{KB} kolektorového priedchodu vyjadruje zase vzťah

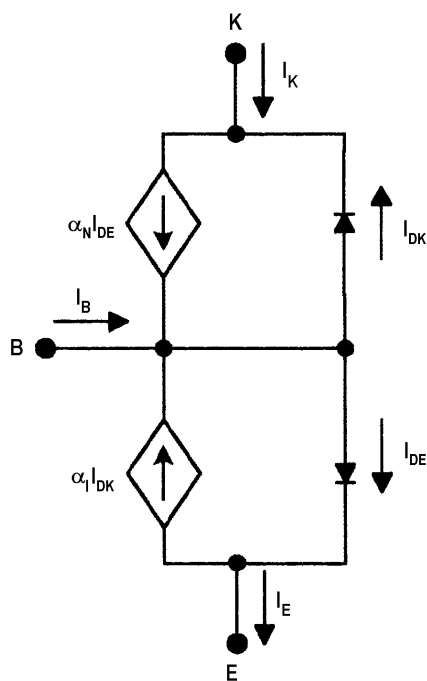
$$I_{DK} = I_{KT} \left(e^{\frac{eU_{KB}}{k_B T}} - 1 \right), \quad (118)$$

kde I_{ET} a I_{KT} sú pokojové (zvyškové) teplotné prúdy nasýtenia emitorového resp. kolektorového priedchodu *p-n*, T je absolútna (termodynamická) teplota, k_B je Boltzmannova konštanta.

V *Ebersovom-Mollovom modeli* sú oba spomenuté režimy lineárne superponované. Tento fyzikálny model tranzistora môžeme opísať sústavou rovníc, ktoré zároveň opisujú charakteristiky ideálneho tranzistora. Z obrázku 33 vidieť, že prúd emitora a kolektora majú vo všeobecnosti dve zložky: *injekčnú* (I_{DE} resp. I_{DK}) a *zberaciu* ($\alpha_1 I_{DK}$ resp. $\alpha_N I_{DE}$), pre I_E a I_K platí

$$I_E = I_{DE} - \alpha_1 I_{DK}, \quad (119a)$$

$$I_K = \alpha_N I_{DE} - I_{DK}. \quad (119b)$$



Obrázok 33 Ebersova-Mollova náhradná schéma *npn* tranzistora. Každý *p-n* priedchod je reprezentovaný diódou a ich vzájomná interakcia je vyjadrená prúdovými zdrojmi, kde α_1 je prúdový zosilňovací činiteľ na úseku emitor–báza–kolektor, α_N je prúdový zosilňovací činiteľ na úseku kolektor–báza–emitor

¹⁸Prvý tranzistor s hrotovými kontaktmi skonstruovali v roku 1947 američania John Bardeen, Walter Brattain a William Schockley z Bellových laboratórií v USA. Čoskoro v roku 1951 W. Schockley vytvoril spoľahlivejší planárny PNP tranzistor, ktorého výroba bola omnoho ľahšia. Slovo tranzistor vzniklo kombináciou slov *transferovať* a *rezistor*.

Dosadením (117) a (118) do sústavy (119) a úpravou dostaneme (z dôvodu prehľadnosti sme zaviedli tieto substitúcie $a_{11} = I_{ET}$, $a_{12} = \alpha_I I_{KT}$, $a_{21} = \alpha_N I_{ET}$, $a_{22} = I_{KT}$)

$$I_E = a_{11} \left(e^{\frac{eU_{EB}}{k_B T}} - 1 \right) - a_{12} \left(e^{\frac{eU_{KB}}{k_B T}} - 1 \right), \quad (120a)$$

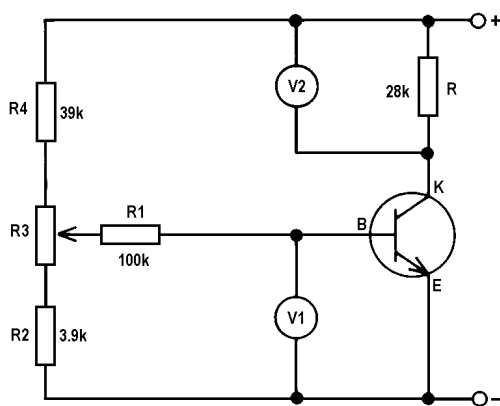
$$I_K = a_{21} \left(e^{\frac{eU_{EB}}{k_B T}} - 1 \right) - a_{22} \left(e^{\frac{eU_{KB}}{k_B T}} - 1 \right), \quad (120b)$$

kde a_{11} , a_{12} , a_{21} a a_{22} sú konštanty, ktoré ako už bolo spomenuté, reprezentujú zvyškové prúdy priechodov. Vzhľadom na to, že $I_{ET} \approx I_{KT}$ a $\alpha_N \approx 1$, môžeme položiť $a_{12} = a_{21}$ a $a_{11} \approx a_{22}$.¹⁹ Úpravou rovníc (120) môžeme eliminačnou metódou vylúčiť napätie U_{KB} a dostaneme:

$$a_{11} I_E - a_{12} I_K = (a_{11}^2 - a_{12}^2) \left(e^{\frac{eU_{EB}}{k_B T}} - 1 \right). \quad (121)$$

Keďže prúd bázy I_B je oveľa menší ako prúd emitora I_E alebo prúd kolektora I_K , pričom môžeme predpokladať $I_E \approx I_K$, po úprave rovnicu (121) prepíšeme do tvaru

$$I_K \approx (a_{11} + a_{12}) \left(e^{\frac{eU_{EB}}{k_B T}} - 1 \right). \quad (122)$$



Obrázok 34 Bipolárny tranzistor NPN v zapojení so spoločným emitorom. V1 je voltmeter na meranie napätia emitor-báza U_{EB} , V2 je voltmeter na meranie napätia U_R na kolektorovom odpore R

Namiesto merania kolektorového prúdu I_K je výhodnejšie merať napätie na kolektorovom odpore R a použitím Ohmovho zákona vyjadriť I_K . Pre väčšie napätia U_{EB} ako $k_B T/e$ je exponenciálny člen oveľa väčší ako 1 a s dobrým priblížením môžeme rovnicu (122) prepísať do tvaru

$$U_R = B e^{\frac{eU_{EB}}{k_B T}}, \quad (123)$$

kde B je konštanta.²⁰ Logaritmovaním transformujeme rovnicu do lineárneho tvaru $y = a + bx$

$$\ln U_R = \ln B + \frac{e}{k_B T} U_{EB}. \quad (124)$$

Metódou najmenších štvorcov môžeme určiť optimálnu hodnotu smernice b . Ďalší parameter a neurčujeme, pretože od neho hodnota náboja elektrónu nezávisí.

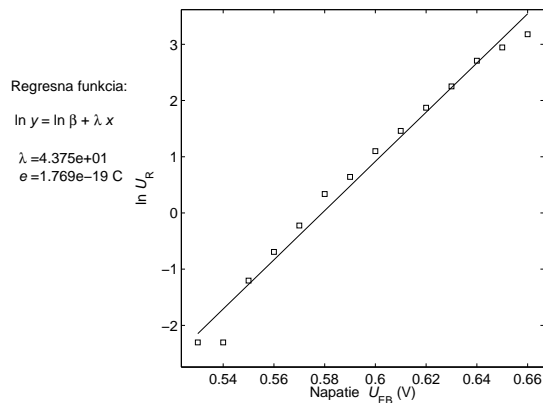
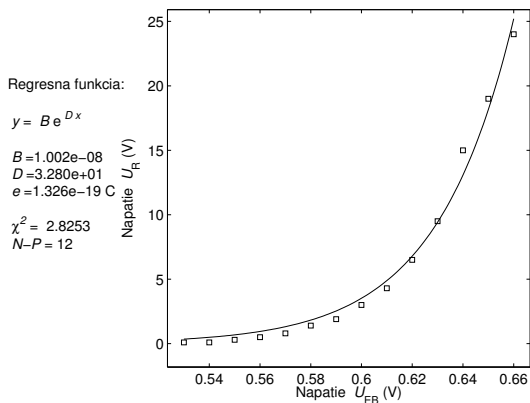
Postup pri meraní, spracovaní a vyhodnotení

Aparatúra je v laboratóriu skompletizovaná a pripravená na meranie. Základná schéma zapojenia je na obrázku 34. Meranie vykonáme podľa inštruktážneho návodu, ktorý je priložený

¹⁹Koeficienty a_{12} a a_{21} sa musia rovnať, lebo uvažujeme súmerný bezdriftový tranzistor.

²⁰Pre teplotu $t = 20^\circ\text{C}$ je $\frac{k_B T}{e} \approx 25,3$ mV.

k experimentálnemu zariadeniu. Merané hodnoty jednotlivých napätí zapisujeme do tabuľky 25. Potrebujeme zmerať napätie U_{EB} a zodpovedajúce napätie na kolektorovom odpore U_R . Napätie U_{EB} meníme v rozsahu 0,5 až 0,7 V a meriame ho číslicovým voltmetrom V1. Zodpovedajúce napätie U_R meriame voltmetrom so širokým rozsahom V2. Pri každom meraní napätí zapisujeme do tabuľky teplotu tranzistora a do vzťahu (124) dosadíme jej aritmetický priemer. Použitím metódy najmenších štvorcov určíme hodnotu $e/k_B T$ a vyčíslíme náboj elektrónu (pozri obrázky 35 a 36), výsledok ohodnotíme štandardnou neistotou a porovnáme s tabuľkovou hodnotou.



Obrázok 35 Graf znázorňuje priebeh nameraných hodnôt napätia U_R ako funkciu napätia emitor–báza U_{EB} a spojitú krivku, ktorá bola získaná fitovaním podľa vzťahu (123) programom MATLAB použitím funkcie `fminsearch`. Vyčíslená hodnota náboja elektrónu z takto získaného parametra D je $1,326 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Obrázok 36 Graf znázorňuje priebeh nameraných hodnôt napätia U_R ako funkciu napätia emitor–báza U_{EB} a spojitú krivku, ktorá bola získaná fitovaním podľa vzťahu (124) programom MATLAB použitím funkcie `polyfit`. Vyčíslená hodnota náboja elektrónu z takto získaného parametra λ je $1,769 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Tabuľka 25 Vzorová tabuľka na záznam nameraných hodnôt k úlohe E12

i	$\frac{U_{EB}}{V}$	$\frac{U_R}{V}$	$\frac{T}{K}$
1			
\vdots			
15			

E14 OVERENIE STEFANOVHO-BOLTZMANNOVHO ZÁKONA (bez použitia pyrometra)

Úlohy merania

1. Meraním voltampérovej charakteristiky volfrámovej žiarovky zostrojíte graf závislosti $R_T(U)$ pre malé hodnoty napätia $U = 1-6$ V a graf závislosti $\ln P^*(\ln T)$ privedeného výkonu od teploty pre vyššie napätia $U = 20-120$ V.
2. Určíte exponent v mocnine závislosti M_0 od T v rovnici (126) stanovením hodnoty parametra n v rovnici (138) metódou najmenších štvorcov, výsledok ohodnotíte štandardnou neistotou.

Teoretický základ

Objasnenie zákonitosti tepelného žiarenia a elektromagnetizmu viedlo k vzniku kvantovej fyziky. Stefanov-Boltzmannov zákon, ktorý je integrálnym tvarom Planckovho zákona žiarenia absolútne čierneho telesa, umožňuje kvantitatívne vyšetriť v laboratórnych podmienkach zákonitosti tepelného žiarenia telies.

Spektrálna hustota vyžarovania absolútne čierneho telasa $M_{0\lambda}$ (energia vyžiarená v intervale vlnových dĺžok $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ z plošnej jednotky povrchu telesa za jednotkový čas pri teplote T) je vyjadrená *Planckovým vzťahom*

$$\frac{dM_{0\lambda}(T, \lambda)}{d\lambda} = \frac{2\pi c^2 h \lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right). \quad (125)$$

Celková vyžiarená energia za jednotku času z plošnej jednotky pre všetky vlnové dĺžky je

$$M_0 = \int_0^{\infty} M_{0\lambda} d\lambda = \frac{2\pi^5}{15} \frac{k_B^4}{c^2 h^3} T^4 = \sigma T^4, \quad (126)$$

čo je matematické vyjadrenie *Stefanovho-Boltzmannovho zákona*. Experimentálne tento vzťah potvrdil slovinský fyzik *Jožef Stefan* v r. 1879 a teoretické zdôvodnenie zákona previedol rakúsky fyzik *Ludwig Eduard Boltzmann* v r. 1884.

Keď teleso nie je absolútne čierne vzťah (126) sa modifikuje do tvaru

$$M_0 = \varepsilon \sigma T^4, \quad (127)$$

kde ε je *emisivita*²¹ povrchu.

V našom laboratórnom cvičení ako zdroj žiarenia použijeme volfrámové vlákno žiarovky, pre ktoré je emisivita $0 < \varepsilon < 1$. Na overenie vzťahu (126) použijeme postup, pri ktorom aplikujeme princíp *Piraniho vákuometra* (r. 1906), v ktorom sa výhodne používa žiarovka, napr. 40 W/230 V napájaná napätím 3 až 4 V. Po pripojení napätia na vlákno sa jeho teplota zvyšuje tak dlho, až dôjde k rovnovážnemu stavu, keď je príkon privádzaný do vlákna rovný energii odvádzanej molekulami okolitého plynu, energii E_v vyžiarenej vláknom a energii E_p odvádzanej prívodmi vlákna za sekundu. V rovnovážnom stave platí

$$\frac{dQ_1}{dt} = I^2 R_T \quad (\text{privedené teplo za sekundu}), \quad (128)$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = \beta S(T - T_0) \quad (\text{odvedené teplo za sekundu}), \quad (129)$$

kde I je elektrický prúd prechádzajúci vláknom žiarovky, R_T je odpor vlákna, β je koeficient prenosu tepla povrchom a prívodmi vlákna, S je povrch vlákna, T je ustálená teplota vlákna a T_0 je teplota plynu obklopujúceho vlákno. V ustálenom stave platí

$$\frac{dQ_1}{dt} = \frac{dQ_2}{dt}. \quad (130)$$

Na zvýšenie teploty vlákna o $\Delta T = (T - T_0)$ môžeme z poslednej rovnice napísať

$$\Delta T = \frac{I^2 R_T}{\beta S}. \quad (131)$$

Dôsledkom tejto zmeny teploty je zvýšenie odporu vlákna o $\Delta R = R_T - R_0$. Odpor kovového vodiča závisí od teploty podľa vzťahu $R_T = R_0(1 + \alpha \Delta T)$, teda pre ΔT platí

$$\Delta T = \frac{R_T - R_0}{\alpha R_0}. \quad (132)$$

Z rovnosti pravých strán rovníc (131) a (132) po úprave môžeme napísať výraz pre odpor vlákna žiarovky ako funkciu jej príkonu $I^2 R_T = UI$

$$R_T = R_0 + \frac{\alpha R_0}{\beta S} I^2 R_T, \quad \text{alebo} \quad \frac{U}{I} = R_0 + \frac{\alpha R_0}{\beta S} UI. \quad (133)$$

Meraním prúdu pri malých hodnotách napätia (2 až 12 V) dostaneme predpokladanú lineárnu zislosť $R_T(UI)$, z ktorej metódou najmenších štvorcov určíme optimálne hodnoty parametrov a

²¹Emisivita je pomer vyžarovania tepelného žiariča k vyžarovaniu čierneho telasa pri takej istej teplote $\varepsilon = M/M_0 = \int_0^\infty \varepsilon(\lambda, T) M_{0\lambda} d\lambda / \int_0^\infty M_{0\lambda} d\lambda$.

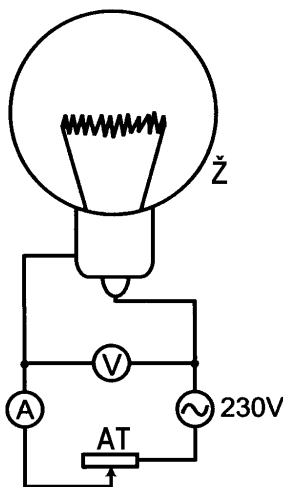
a b meranej lineárnej závislosti $y = a + bx$. Parameter a je rovný hodnote odporu vlákna žiarovky R_0 pri teplote T_0 a parameter $b = \alpha R_0 / \beta S$. Hodnotu R_0 budeme potrebovať pri určovaní teploty vlákna žiarovky T pri vyšších hodnotách dodávanej energie (keď vlákno žiari). Teplotu vlákna budeme počítať z rovnice (132) upravenej do tvaru

$$T = \frac{R_T + R_0(\alpha T_0 - 1)}{\alpha R_0} = \frac{\frac{U}{I} + R_0(\alpha T_0 - 1)}{\alpha R_0}. \quad (134)$$

Pri vyšších hodnotách privedenej energie do vlákna musíme v rovnici (129) zohľadniť aj podiel vyžiarenej energie vláknom E_v a žiarivej energie, ktorá dopadá na vlákno z okolia. Pre rovnovážny stav platí rovnica

$$UI = \beta S(T - T_0) + \varepsilon S \sigma T^4 - BT_0^4, \quad (135)$$

kde súčin BT_0^4 je žiarivý výkon dodávaný z okolia a B je konštanta.



Obrázok 37 Schéma zapojenia prístrojov na overenie Stefanovho-Boltzmannovho zákona. AT – autotransformátor, A – ampérmeter, V – voltmeter, Ž – žiarovka

Pri teplotách nad 1000 K je $T^4 \gg T_0^4$ a rovnicu môžeme prepísať do tvaru

$$UI = \beta S(T - T_0) + \varepsilon S \sigma T^4 \quad (136)$$

a po krátkej úprave dostaneme (pomocou parametrov a a b sme vyjadrili $\beta S = \frac{a}{b} \alpha$)

$$UI - \frac{a}{b} \alpha (T - T_0) = \varepsilon S \sigma T^4. \quad (137)$$

Zavedme tieto substitúcie: $UI - \frac{a}{b} \alpha (T - T_0) = P^*$, $4 = n$, $\varepsilon S \sigma = m$. Logaritmovaním transformujeme upravenú rovnicu (137) do lineárneho tvaru $y = m + nx$

$$\ln P^* = \ln m + n \ln T. \quad (138)$$

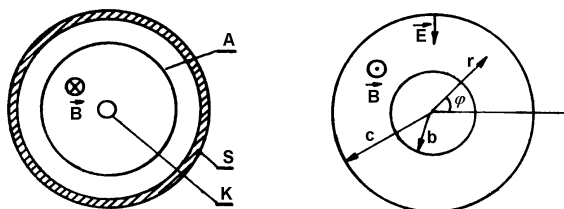
Konštanty m a n vypočítame metódou najmenších štvorcov pre taký interval $\ln T$, v ktorom je závislosť $\ln P^*(\ln T)$ lineárna. Keďže parametre m a n určené z rovnice (138) sú závislé od voľby hraničných bodov linearizácie, merané hodnoty je potrebné spracovať aj voľbou iných hraničných hodnôt $\ln T$. Z uvedeného výkladu vyplýva, že hodnota parametra n je vlastne mierou overenia Stefanovho-Boltzmannovho zákona. Keď je hodnota parametra n blízka číslu 4, experimentálne overenie zákona môžeme považovať za uspokojivé.

E16 URČENIE HMOTNOSTNÉHO NÁBOJA ELEKTRÓNU MAGNETRÓNOM

Úlohy merania

1. Určte hmotnostný náboj elektrónu meraním charakteristiky $I_A = f(I_m)$ pre tri rôzne hodnoty U_A .
2. Inflexné body kriviek z predchádzajúcej úlohy určte numerickým derivovaním experimentálnej krivky, prípadne použitím grafickej derivácie!²³
3. Hmotnostný náboj elektrónu vypočítaný podľa vzťahu (158) porovnajte s tabuľkovou hodnotou.

Teoretický základ



Obrázok 41 Náčrt vľavo znázorňuje kolmý rez vákuovou diódou, ktorá je umiestnená v magnetickom poli vytvorenom solenoidom S. A je anóda a K je katóda diódy

Pomer náboja e a hmotnosti elektrónu m_e je hmotnostný náboj elektrónu e/m_e . Najjednoduchším magnetrónom je dióda umiestnená v magnetickom poli, ktorého indukcia je rovnobežná s geometrickou osou valca, ktorý tvorí anódu A, ako je to znázornené na obrázku 41 vľavo. Z povrchu žeravenej katódy sa uvoľňujú elektróny urýchľované elektrickým a magnetickým poľom v rovine kolmej k osi valcov. Magnetické pole spôsobuje len zakrivenie trajektórie elektrónov, ktoré

vzrastá s rastúcou indukciou poľa. Pri určitej veľkosti indukcie B_0 , sa niektoré elektróny vôbec na anódu nedostanú, čo sa prejaví poklesom anódového prúdu. Urobme si zjednodušený

²³Pozri napr. I. N. Bronštejn – K. A. Semend'ajev *Príručka matematiky pre inžinierov a pre študujúcich*. Bratislava: SVTL, 1964, str. 398

výpočet tejto potrebnej veľkosti indukcie magnetického poľa.

Zvoľme si polárnu (resp. valcovú) súradnicovú sústavu s počiatkom na geometrickej osi valcov (obrázok 41 vpravo). Predpokladajme, že elektróny vystupujú z katódy s nulovou začiatočnou rýchlosťou. Nech b je polomer a U_b potenciál katódy, c je polomer a U_c potenciál anódy. Keďže \vec{E} má vždy (intenzita elektrostatického poľa) radiálny smer a \vec{B} smer osi valcov, pre radiálnu F_r a azimutálnu F_φ zložku sily, pôsobiacu na elektrón v bode (r, φ) platí

$$F_r = F_e + F_{Lr}, \quad F_\varphi = F_{L\varphi}, \quad (146)$$

kde F_e je sila, ktorou pôsobí elektrostatické pole na elektrón, $F_e = -e E$, F_{Lr} resp. $F_{L\varphi}$ je Lorentzova sila, ktorou pôsobí magnetické pole solenoidu na elektrón.²⁴ Keďže v polárnej súradnicovej sústave pre veľkosť rýchlosti platí

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2}, \quad (147)$$

kde $v_r = dr/dt$ je radiálna resp. $v_\varphi = r(d\varphi/dt)$ azimutálna zložka rýchlosti, potom pre Lorentzovu silu platí $F_{Lr} = e B r (d\varphi/dt)$ resp. $F_{L\varphi} = -e B (dr/dt)$. Pre veľkosť zrýchlenia v polárnych súradniciach platí vzťah

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2}, \quad (148)$$

kde

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \quad (149)$$

je radiálna a

$$a_\varphi = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad (150)$$

je azimutálna zložka zrýchlenia. Ak teda vyjadríme F_r a F_φ ako súčin hmotnosti a príslušnej zložky zrýchlenia, dostaneme

$$F_r = m_e a_r = m_e (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) = e (-E + B r \dot{\varphi}), \quad (151)$$

$$F_\varphi = m_e a_\varphi = m_e (2 \dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) = -e B \dot{r}, \quad (152)$$

kde bodka nad veličinou znamená deriváciu podľa času a $e = -1,602 \cdot 10^{-19}$ C je náboj elektrónu. Ak vynásobíme rovnicu (152) polomerom r dostávame

$$2 r \dot{r} \dot{\varphi} + r^2 \ddot{\varphi} = -(e/m_e) B r \dot{r}. \quad (153)$$

Ľavá strana tejto rovnice je však deriváciou $r^2 \dot{\varphi}$ podľa času, na pravej strane $r \dot{r} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r^2)$, takže platí $2 r \dot{r} \dot{\varphi} + r^2 \ddot{\varphi} = \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = \frac{e B}{2 m_e} \frac{d}{dt} (r^2) = -\frac{e B}{m_e} r \dot{r}$, odkiaľ dostávame $d(r^2 \dot{\varphi}) = -\frac{e B}{2 m_e} d(r^2)$.

²⁴Vzťah pre silu, ktorá ako jediná pôsobí na elektrický náboj v elektromagnetickom poli sformuloval v roku 1909 holandský fyzik Hendrik Antoon Lorentz a podľa neho sa nazýva Lorentzova sila.

Integráciou poslednej rovnice v medziach $r = b$ až $r = c$ dostávame

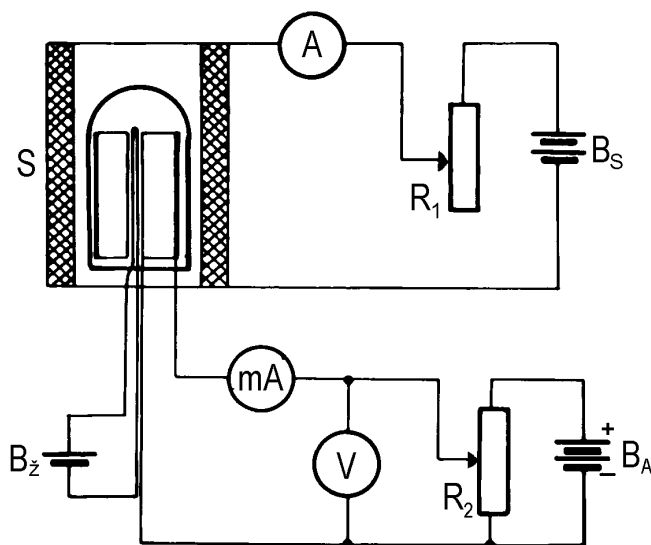
$$\frac{-e}{m_e} \frac{B_0}{2} (c^2 - b^2) = c^2 \dot{\varphi}_c - b^2 \dot{\varphi}_b, \quad (154)$$

kde $\dot{\varphi}_b$ a $\dot{\varphi}_c$ sú uhlové rýchlosti elektrónu tesne pri katóde a anóde a B_0 je veľkosť indukcie poľa, pri ktorej nastane prvý pokles anódového prúdu magnetrónu. Avšak $\dot{\varphi}_b = 0$ (začiatková rýchlosť v je nulová). Ak sa má elektrón len „tesne dotknúť“ anódy, potom $v_r = 0$ (pozri obrázok 45). Teda zo vzťahu (147) plynie, že $v = c \dot{\varphi}_c$. Keďže magnetické pole pôsobí vždy kolmo na smer okamžitej rýchlosti, nemôže ovplyvňovať jej veľkosť. Preto práca W , vykonaná elektrickým poľom medzi K a A pri prelete elektrónu musí byť rovná jeho kinetickej energii tesne pri anóde

$$W = e (U_b - U_c) = \frac{c^2 \dot{\varphi}_c^2}{2} m_e, \quad (155)$$

kde $U_c - U_b = U$ je anódové napätie. Z poslednej rovnice získame $c \dot{\varphi}_c = \sqrt{\frac{-2eU}{m_e}}$ a po dosadení do rovnice (154) a úprave dostaneme

$$\frac{e}{m_e} = -\frac{8Uc^2}{B_0^2 (c^2 - b^2)^2}. \quad (156)$$



Obrázok 42 Schéma zapojenia meracích prístrojov. S je cievka na vytvorenie magnetického poľa, A je ampérmeter, R_1 reostat na regulovanie magnetizačného prúdu, B_s je zdroj napätia, mA je miliampérmeter, V je voltmeter, R_2 je reostat na regulovanie napätia anódy, B_A je zdroj napätia anódy a B_z je zdroj napätia na žeravenie katódy

Tento vzťah môžeme použiť na určenie hmotnostného náboja elektrónu, ak zmeriame veľkosť magnetickej indukcie B_0 , pri ktorej sa anódový prúd začne znižovať (nebude nulový, keďže všetky elektróny nemajú začiatkovú rýchlosť nulovú). Na vytvorenie magnetického poľa použijeme dostatočne dlhú cievku, aby sme mohli magnetickej indukciu počítať zo vzťahu

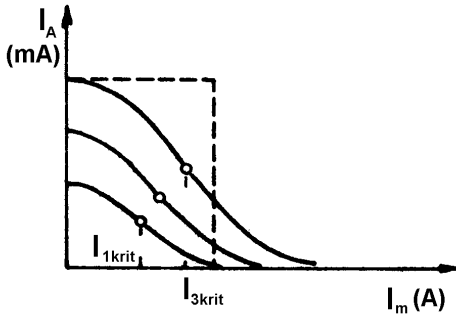
$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I, \quad (157)$$

kde μ_0 je permitivita vákuua, I prúd v cievke, N počet závitov v cievke pripadajúci na dĺžku cievky L ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H m}^{-1}$).

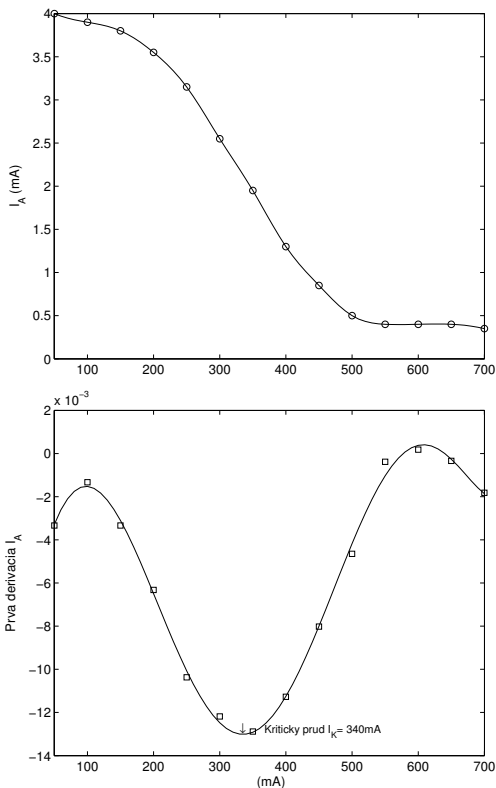
Postup pri meraní, spracovaní a vyhodnotení

Zapojenie realizujeme podľa obrázku 42. Po zahriatí katódy (asi 1 min.) nastavíme potenciometrom R_2 napätie anódy U_A na hodnotu, ktorú v priebehu merania udržujeme stálu a meriame

voltmetrom V. Potom pripojíme na svorky solenoidu zdroj napätia U_s a reostatom R_1 regulujeme magnetizačný prúd I_m , meraný ampérmetrom A. Postupným zvyšovaním I_m sa zvyšuje intenzita magnetického poľa H resp. $\mu_0 H = B$, následkom čoho sa mení prúd I_A prechádzajúci medzi katódou a anódou diódy.



Obrázok 43 Teoretický priebeh anódového prúdu magnetrónu $I_A = f(I_m)_{U=\text{konšt.}}$.



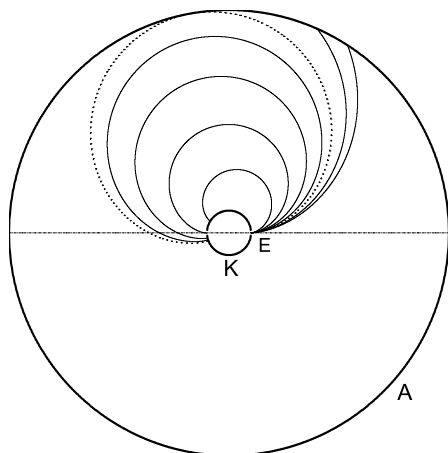
Obrázok 44 Krivka v hornom grafe znázorňuje priebeh anódového prúdu I_A magnetrónu, dolná krivka priebeh prvej derivácie hornej krivky. Za kritickú hodnotu prúdu tečúceho solenoidom považujeme tú, pre ktorú má závislosť anódového prúdu inflexný bod; šípku označený bod na dolnej krivke

Meranie vykonáme pri troch rôznych hodnotách U_A a zapisujeme do tabuľky 29. Z nameraných hodnôt I_A a I_m pri $U_A = \text{konšt.}$ zostrojíme charakteristiky $I_A = f(B)$, pričom $B \approx I_m$ (pozri vzťah 157). Dosadením vzťahu (157) do (156) pre $b \ll c$, $c = R$ dostávame

$$\frac{e}{m_e} = -\frac{UL^2}{2\pi^2 R^2 N^2 I_{\text{krit}}^2} \cdot 10^{14} \quad (\text{C kg}^{-1}). \quad (158)$$

Pri výpočte hmotnostného náboja elektrónu podľa vzťahu (158) sa dopúšťame najväčšej chyby pri stanovení kritickej hodnoty prúdu I_{krit} . V porovnaní s touto chybou, môžeme chybu polomeru anódy a chyby elektrických meracích prístrojov zanedbať. Ďalšími výraznými zdrojmi chýb sú:

- Vplyv priestorového náboja elektrónov, tzn. že náboj elektrónov medzi katódou a anódou zmení rozloženie elektrostatického poľa. Vzťah (158) bol odvodený za predpokladu, že elektrické pole je určené len potenciálom elektród. Veľkosť tohto vplyvu môžeme určiť meraním závislosti $I_A = f(I_m)_{U=\text{konšt.}}$ pre rôzne veľkosti žeraviceho prúdu katódy (teda pre rôzne hustoty elektrónov vyletujúcich z katódy).
- Ďalej musíme vziať do úvahy, že dióda nemá presne súosovo usporiadanú katódu a anódu, a že katóda je nepriamo žeravená, teda nemá po celej svojej dĺžke rovnaký potenciál, ale pozdĺž žeraveného vlákna sa vytvára úbytok žeraviceho napätia.
- Elektróny vystupujú z katódy s malými rýchlosťami zodpovedajúcimi ich tepelnému pohybu a nie nulovou rýchlosťou, ako sme to pre jednoduchosť predpokladali.
- Neuvažovali sme ani vplyv zrážok elektrónov s atómami medzi elektródami (v dióde nie je dokonalé vákuum).



Obrázok 45 Trajektórie jediného elektrónu v magnetróne získané numerickým riešením pohybovej rovnice pre rôzne hodnoty magnetickej indukcie. Trajektória elektrónu pre kritické pole [podľa rovnice (156)] je znázornená bodkovanou čiarou. Uvažujeme elektrón emitovaný katódou s nulovou začiatočnou rýchlosťou v bode E. Polomer anódy A je desaťnásobok polomeru katódy K. Napätie medzi elektródami je 100 V

Všetky uvedené vplyvy sa uplatnia pri meraní závislosti $I_A = f(I_m)_{U=\text{konšt.}}$ tak, že pokles anódového prúdu pri criticalkej magnetickej indukcií ne-nastane skokom na nulu (prerušovaná čiara na obrázku 43), ale je pozvoľný. Z týchto dôvodov by bol presný rozbor chýb veľmi ťažký, obmedzíme sa preto len na porovnanie vypočítaných hodnôt e/m_e podľa vzťahu (158) s tabuľkovou hodnotou a jej chybou.

Poznámky a kontrolné otázky

1. Aká sila vychýľuje elektróny z radiálneho smeru?
2. Prečo sa nemení anódový prúd skokom?

Tabuľka 29 Vzorová tabuľka na záznam nameraných hodnôt k úlohe E16

i	$U_1 = \dots V$		$U_2 = \dots V$		$U_3 = \dots V$	
	$\frac{I_A}{\text{mA}}$	$\frac{I_m}{\text{A}}$	$\frac{I_A}{\text{mA}}$	$\frac{I_m}{\text{A}}$	$\frac{I_A}{\text{mA}}$	$\frac{I_m}{\text{A}}$
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						

NIEKTORÉ UŽITOČNÉ VZŤAHY

Operácie s neistotami

Pri nepriamom meraní jednej veličiny, ktorej cieľom je určenie jej číselnej hodnoty, a ktorá sa počíta z priamo meraných veličín, pomocou ktorých je definovaná, na určenie štandardnej neistoty výsledku merania postupujeme podľa vzťahov uvedených v tabuľke 45.

Tabuľka 45 Tabuľka operácií s neistotami

Funkčný vzťah medzi Z a A, B	Vzťah medzi štandardnými neistotami
$Z = A + B$ $Z = A - B$	$(\Delta Z)^2 = (\Delta A)^2 + (\Delta B)^2$
$Z = A \cdot B$ $Z = \frac{A}{B}$	$(\frac{\Delta Z}{Z})^2 = (\frac{\Delta A}{A})^2 + (\frac{\Delta B}{B})^2$
$Z = A^n$	$\frac{\Delta Z}{Z} = n \frac{\Delta A}{A}$
$Z = \sqrt[n]{A}$	$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{1}{n} \frac{\Delta A}{A}$
$Z = A^\alpha \cdot B^\beta \cdot \dots$	$(\frac{\Delta Z}{Z})^2 = \alpha^2 (\frac{\Delta A}{A})^2 + \beta^2 (\frac{\Delta B}{B})^2 + \dots$
$Z = \ln A$	$\Delta Z = \frac{\Delta A}{A}$
$Z = \exp A$	$\frac{\Delta Z}{Z} = \Delta A$

Metóda najmenších štvorcov pre priamky typu $y = a + bx$ a $y = ax$ ⁴²

Zaveďme tieto označenia pre aritmetické priemery

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \langle y \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \langle xy \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i, \langle x^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \langle y^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2$$

a pre disperzie

$$D(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, D(y) = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2.$$

Potom pre priamku vyjadrenú rovnicou $y = a + bx$ sú optimálne hodnoty parametrov a a b rovné

$$b = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{D(x)},$$

$$a = \langle y \rangle - b \cdot \langle x \rangle$$

a pre štandardné neistoty v určení parametrov a a b môžeme napísať

$$u_b = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{D(y)}{D(x)} - b^2},$$

$$u_a = u_b \sqrt{D(x)}.$$

Podobne pre závislosť typu $y = ax$ platia tieto vzťahy

$$a = \frac{\langle xy \rangle}{\langle x^2 \rangle},$$

$$u_a = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle} - a^2}.$$

Odhad štandardnej neistoty pre malý počet meraní⁴³

n	k_n
2	0,886
3	0,591
4	0,486
5	0,430

Pri malom počte meraní ($n < 10$) môžeme použiť zjednodušený vzorec, ktorý nie je oddôvodnený počtom pravdepodobnosti, ale pre bežnú prax vyhovuje. Dean a Dixon (1951) navrhli jednoduchú metódu odhadu smerodajnej odchýlky, ktorá sa počíta podľa vzorca $s_1 = k_n \cdot \Delta V$, kde k_n je koeficient závisiaci od počtu meraní (hodnoty sú uvedené v tabuľke) a ΔV je variačné rozpätie.⁴⁴ Musíme mať na pamäti, že počítame iba s odhadmi (s), nie so správnym parametrom (σ).

⁴²Podrobne o MNS v literatúre (KUDRACIK, 1999; LYONS, 2001; PETROVIČ A KOL., 1989; SQUIRES, 2001).

⁴³Viac informácií o tom v knižke *Základy vedeckej práce v medicíne* (BAJGAR A KOL., 1984).

⁴⁴Variačné rozpätie $\Delta V = x_{\max} - x_{\min}$ je definované, ako rozdiel najväčšej (maximálnej) a najmenej (minimálnej) meranej hodnoty.

CHYBY ELEKTRICKÝCH MERACÍCH PRÍSTROJOV

Chyby analogových meracích prístrojov

Pre praktickú potrebu bola zvolená a normovaná charakteristika nazývaná *trieda presnosti* δ_{TP} . Trieda presnosti zahrňa všetky chyby samotného prístroja a definuje tak medznú (maximálnu, dovolenú) relatívnu chybu v celom meracom rozsahu prístroja

$$\delta_{TP} = \frac{|\Delta_{\max}|}{X_{mr}} 100 (\%), \quad (215)$$

kde Δ_{\max} je medzná (maximálna) absolútna chyba prístroja a X_{mr} je najväčšia hodnota meracieho rozsahu. *Merací rozsah* je časť stupnice meracieho prístroja, na ktorej je možné merať s predpísanou presnosťou. Najväčšia hodnota meracieho rozsahu X_{mr} je určená

- hornou hranicou meracieho rozsahu (keď je dolná hranica nula),
- súčtom oboch medzných hraníc (keď je nula uprostred stupnice),
- rozdielom hornej a dolnej hranice (keď je potlačená nula na stupnici).

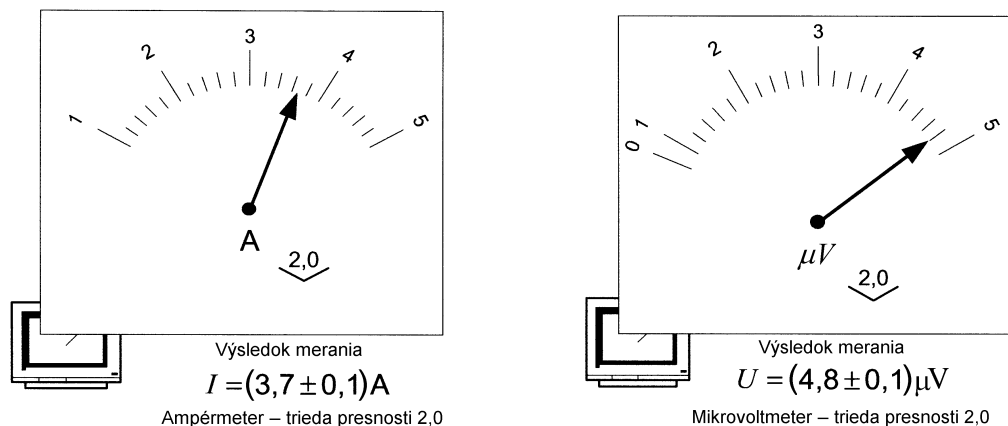
Keď má prístroj určitú triedu presnosti je tým definovaná jeho maximálna dovolená relatívna chyba vyjadrená v % najväčšej hodnoty meracieho rozsahu. Trieda presnosti je uvedená na číselníku každého analogového meracieho prístroja. *Maximálnu absolútnu chybu prístroja* môžeme vyjadriť vzťahom

$$\Delta_{\max} = \pm \frac{X_{mr}}{100} \delta_{TP}. \quad (216)$$

Relatívna chyba meraného údajja je

$$\delta_{rel} = \pm \frac{\Delta_{\max}}{X_{mh}} 100 = \pm \delta_{TP} \frac{X_{mr}}{X_{mh}} (\%),$$

kde X_{mh} je nameraná hodnota. Z posledného vzťahu je vidieť, že čím menšia je meraná hodnota (čím menšia je výchylka prístroja), tým väčšia bude relatívna chyba merania. Z toho vyplýva, že pri meraní analogovými meracími prístrojmi musíme voliť taký rozsah prístroja, aby jeho výchylka bola čo najväčšia!



Obrázok 66 Na obrázku vidíme príklady zobrazenia hodnoty prúdu a napätia analogovými meracími prístrojmi s triedou presnosti 2,0. Maximálna absolútna chyba hodnoty merania bola vypočítaná pomocou vzťahu (216)

Príklad A

Analogovým voltmetrom s triedou presnosti $\delta_{\text{TP}} = 1$ sme namerali na rozsahu $X_{\text{mr}} = 60 \text{ V}$ napätia 58 V a 5 V.

Absolútna chyba je pri všetkých meraniach rovnaká a je daná triedou presnosti použitého voltmetra

$$\Delta_{\text{max}} = \pm \frac{X_{\text{mr}}}{100} \delta_{\text{TP}} = \pm \frac{60}{100} 1 = \pm 0,6 \text{ V.}$$

To znamená, že prístroj meria s presnosťou $\pm 0,6 \text{ V}$ na celej stupnici pri meraní napätia 58 V aj pri meraní napätia 5 V. Veľkosti relatívnych chýb údajov budú

$$\delta_{\text{rel}} = \pm \delta_{\text{TP}} \frac{X_{\text{mr}}}{X_{\text{mh}}} = \pm 1 \frac{60}{58} = \pm 1,03 \%,$$

$$\delta_{\text{rel}} = \pm \delta_{\text{TP}} \frac{X_{\text{mr}}}{X_{\text{mh}}} = \pm 1 \frac{60}{5} = \pm 12 \%.$$

Vidieť, že so znižovaním výchylky relatívna chyba údajov rýchle rastie, jej závislosť od výchylky je hyperbolická!

Chyby číslicových meracích prístrojov

Číslicové (digitálne meracie prístroje) merajú pomerne dobre len jednosmerné napätia a prúdy, ostatné veličiny s niekoľkonásobne väčšou chybou ako presné analogové (ručičkové) meracie prístroje, pretože sa u týchto prístrojov všetky merané veličiny prevádzajú pomocou usmerňovača na jednosmerné napätie. Usmernené napätie sa ďalej digitalizuje pomocou analógovo-číslícového prevodníka (AD). AD prevodníky vnášajú do merania ďalšie chyby. Nemá teda

zmysel overovať triedu presnosti analogového meracieho prístroja pomocou bežného vreckového multimetra!

Väčšina výrobcov číslicových prístrojov uvádza presnosť prístroja (tzv. základnú chybu) v tvare $\delta_{\text{čmp}} = \pm(\delta_1 + d)$, niektorí v tvare $\delta_{\text{čmp}} = \pm(\delta_1 + \delta_2)$, kde

δ_1 je chyba z nameranej hodnoty, býva vyjadrená v % a je v celom meracom rozsahu konštantná, niekedy sa za ňu pripisuje značka rdg (reading–čítanie),

δ_2 je chyba z meracieho rozsahu, nemôžeme ju však jednoducho sčítať s chybou z nameranej hodnoty δ_1 , ale ju musíme prepočítať na veľkosť nameranej hodnoty $\left(\delta_2 \frac{X_{\text{mr}}}{X_{\text{mh}}}\right)$; niekedy sa za ňu pripisuje značka FS (full scale–plný rozsah),

d je chyba udaná z počtu jednotiek (digitov) posledného miesta displeja. Jej prepočet na chybu z meracieho rozsahu závisí od počtu zobrazovaných miest displeja. Prepočet na percentuálnu chybu z meracieho rozsahu je rovný $\delta_2 = \frac{d}{\text{max. počet indikovaných jednotiek}} 100$ (%).

Celková relatívna chyba číslicového meracieho prístroja je pri meraní vyjadrená vzťahom

$$\delta_{\text{rel}} = \pm \left(\delta_1 + \delta_2 \frac{X_{\text{mr}}}{X_{\text{mh}}} \right) (\%), \quad (217)$$

kde X_{mr} je hodnota meracieho rozsahu a X_{mh} je nameraná hodnota.

Súčasné číslicové meracie prístroje majú automatické prepínanie rozsahov, aby bola pri meraní vždy dosiahnutá maximálna presnosť. Podľa maximálneho počtu zobrazených miest zistíme, na ktorom rozsahu multimeter práve meria. Napr. multimeter s maximálnou hodnotou 3 999 prepína pri meraní automaticky rozsahy 400 mV – 4 V – 40 V – 400 V. Multimeter s maximálnou hodnotou 1 999 prepína pri meraní automaticky rozsahy 200 mV – 2 V – 20 V – 200 V. Prepínanie rozsahov pre meranie ostatných veličín prebieha podobne. Samozrejme chyby každého multimetra pre jednotlivé rozsahy najdete v návode k použitiu meracieho prístroja.

Príklad B

Číslicový voltmeter má na rozsahu 40 V základnú chybu $\pm(0,9 \text{ rdg} + 0,1 \text{ FS})$. Máme zistiť, relatívnu chybu nameraných napätí $U_1 = 10 \text{ V}$ a $U_2 = 28 \text{ V}$ na tomto rozsahu.

$$\delta_{\text{rel}}(U_1) = \pm \left(\delta_1 + \delta_2 \frac{X_{\text{mr}}}{U_1} \right) = \pm \left(0,9 + 0,1 \frac{40}{10} \right) = \pm 1,3 \%,$$

$$\delta_{\text{rel}}(U_2) = \pm \left(\delta_1 + \delta_2 \frac{X_{\text{mr}}}{U_2} \right) = \pm \left(0,9 + 0,1 \frac{40}{28} \right) = \pm 1,04 \%.$$

Príklad C

Chyba číslicového multimetra s $3\frac{1}{2}$ miestnym displejom (maximálna indikovaná hodnota je 1999) je pre meranie striedavého prúdu udaná v tvare $\delta_1 = \pm(1,5\% + 7 \text{ díbit})^{46}$. Máme zistiť veľkosť relatívnej chyby multimetra, keď meriame na rozsahu 40 A prúd 6 A.

Maximálny počet indikovaných jednotiek je 2000.

$$\delta_2 = \frac{d}{\text{max. počet indikovaných jednotiek}} 100 = \frac{7}{2000} 100 = 0,35\%.$$

Celková chyba má tvar $\pm(1,5\% + 0,35 \text{ FS})$.

Relatívnu chybu určíme zo vzťahu

$$\delta_I = \pm \left(\delta_1 + \delta_2 \frac{X_{mr}}{X_{mh}} \right) = \pm \left(1,5 + 0,35 \frac{40}{6} \right) = 3,83\%.$$

⁴⁶díbit je kombinácia (skupina) dvoch binárnych čísiel (digitov) do jednej alebo štyroch kombinácií. Štyri možné stavy pre díbit sú 00, 01, 10 a 11.

LITERATÚRA

- BAJGAR, J. – VIŠŇOVSKÝ, P. a kol. 1984. *Základy vedeckej práce v medicíne*. Martin : Vydavateľstvo Osveta, 1984, 2. prepracované a doplnené vydanie, str.101
- BEISER, A. 1978. *Úvod do modernej fyziky*. Praha : Academia, 1978
- BROŽ, J. a kol. 1967. *Základy fyzikálnych méréni*. Praha : SNP, 1967
- BRUNOVSKÁ, A. 1990. *Malá optimalizácia*. Bratislava : Alfa, 1990, ISBN 80-05-00770-1
- DEAN, R. B. – DIXON, W. J. 1951. *Simplified statistics for small numbers of observations*. J. Anal. Chem., vol. 23, p. 636–638
- DE JONG, M. L. 1999. *Mathematica For Calculus-Based Physics*. Melo Park, California : Addison-Wesley Longman, 1999, ISBN 0-201-60339-X
- EBERS, J. J. – MOLL, J. L. 1954. *Large Signal Behaviour of Junction Transistors*. Proc. I. R. E., vol. 42, p. 1761–1772
- FUKA, J. – HAVELKA, B. 1965. *Elektřina a magnetismus*. Praha : SPN, 1965
- GARCIA, A. L. 2000. *Numerical Methods for Physics*. New Jersey : Prentice Hall, Second Edition, 2000, ISBN 0-13-906744-2
- GAVALEC, M. – KOVÁČOVÁ, N. – OSTERTAGOVÁ, E. – SKŘIVÁNEK, J. 2001. *Pravdepodobnosť a matematická štatistika v počítačovom prostredí MATLABu*. Košice : elfa, s. r. o., 2001, ISBN 80-89066-05-4
- ГНЕДИЕНКО, Б. В. 1965. *Курс теории вероятностей*. Москва : Наука, 1965
- HAJKO, V. a kol. 1983. *Fyzika v príkladoch*. Bratislava : ALFA, 1983, str. 375
- HANSELMAN, D. – LITTLEFIELD, B. 1996. *Mastering MATLAB. A Comprehensive Tutorial and Reference*. New Jersey : Prentice-Hall, 1996, ISBN 0-13-191594-0
- HANSELMAN, D. – LITTLEFIELD, B. 2005. *Mastering MATLAB® 7*. New Jersey : Pearson Prentice-Hall, 2005, ISBN 0-13-185714-2
- KUDRACIK, F. 1999. *Spracovanie experimentálnych dát*. Bratislava : Univerzita Komenského, 1999, ISBN 80-223-1327-0

- LEHOTSKÝ, D. 1967. *Praktikum z fyziky*. Bratislava : SPN, 1967
- LYONS, L. 2001. *A practical guide to data analysis for physical science students*. Cambridge : Cambridge University Press, 2001, ISBN 0-521-42463-1
- MAYER, D. 1978. *Úvod do teorie elektrických obvodů*. Praha : SNTL/ALFA, 1978, str. 142–151
- MELISSINOS, A. C. – NAPOLITANO, J. 2003. *Experiments in Modern Physics*. Amsterdam – Tokyo : Academic Press, Second Edition, 2003, ISBN 0-12-489851-3
- MURÍN, J. – UHRIN, J. 1990. *Laboratorné cvičenia z fyziky*. Košice : Edičné stredisko TU v Košiciach, 1990, ISBN 80-7099-108-9
- OCHABA, I. 1985. *Geofyzika*. Bratislava : SPN, 1985
- PALEŇČÁR, R. – HALAJ, M. 1998. *Metrologické zabezpečenie systémov riadenia kvality*. Bratislava : STU Bratislava, 1998
- PETROVIČ, P. – NADRCHAL, J. – PETROVIČOVÁ, J. 1989. *Programovanie a spracovanie dát I., II.* Košice : Edičné stredisko UPJŠ, 1989
- PHYWE series of publications. 1994. *University Laboratory Experiments Physics*. Vol. 1–5, 2. edition, 1994
- PRATAF, R. 2002. *Getting Started with MATLAB. A Quick Introduction for Scientists and Engineers*. New York, Oxford : Oxford University Press, 2002
- REKTORYS a kol. 1981. *Přehled užití matematiky*. Praha : SNTL, 1981
- SQUIRES, G. L. 2001. *Practical Physics*. Cambridge : Cambridge University Press, 2001, ISBN 0-521-77940-5
- TARABČÁKOVÁ, E. 1977. *Úvod do praktických cvičení z fyziky*. Košice : PF UPJŠ, 1977
- ТИКАДЗУМИ, С. 1983. *Физика ферромагнетизма. Магнитные свойства вещества*. Москва : Мир, 1983

MATLAB

The MathWorks

Nová generace výpočetních nástrojů

SIMULINK
STATEFLOW
SimHydraulics Novinka
SimMechanics
COMSOL Multiphysics

NAG Numerical
Algorithms Group

Nový MATLAB Release 2006a v prodeji

- konstrukční výpočty
- vývoj a ověření algoritmů
- měření, analýza a vizualizace dat
- návrh řídicích a komunikačních systémů
- tvorba programových aplikací
- simulace hydraulických systémů
- simulace dynamických systémů
- podpora systémů reálného času
- modelování a analýza fyzikálních jevů



Pobřežní 20
186 00 Praha 8
Česká republika

info@humusoft.cz
tel.: +420 284 011 730
fax: +420 284 011 740

HUMUSOFT®

www.humusoft.cz

Výhradní distributor pro ČR a SR

Doc. Ing. Ján Uhrin, CSc. – RNDr. Ladislav Ševčovič – Doc. RNDr. Jozef Murín, CSc.

FYZIKÁLNE MERANIA

Vydavateľstvo *elfa*, s. r. o., Letná 9, 042 00 Košice

Náklad: 500 ks

Počet strán: 142

Vydanie: prvé

Máj 2006

ISBN 80-8086-032-7