ADVANCED RISK MANAGEMENT

Výpočet kapitálového požadavku pro neživotní pojišťovny

Klára Hůdová
Advanced Risk Management, s.r.o.

Moderní nástroje pro finanční analýzu a modelování
24. 5. 2006

Advanced Risk Management, s.r.o.

Advanced Risk Management, s.r.o. je nezávislá společnost, která se specializuje na poradenství, školení a software v oblasti

identifikace, měření, řízení a systému kontroly finančních rizik

pro všechny společnosti, které tato rizika ***vědomě*** či ***nevědomě*** **podstupují**.

Advanced Risk Management, s.r.o.
FORMY SPOLUPRÁCE

- **Vytvoření systému pro řízení finančních rizik**
- **Audit řízení finančních rizik**
- **Školení**
- **Vývoj finančního software na zakázku**
- **CADCalc® Credit**
  softwarové řešení výpočtu kapitálového požadavku ke kreditnímu riziku
- **CADCalc® Market**
  softwarové řešení výpočtu kapitálového požadavku k tržnímu riziku

Základní body prezentace

- Úvod
- Solvency II a požadovaný kapitál
- Schnieperův model
- Modelování škod logaritmicko-lineární regresí
- Výpočet kapitálového požadavku

Úvod

- Východiskem je diplomová práce vedená Prof. RNDr. Petrem Mandlem, DrSc. na oddělení Finanční a pojistné matematiky MFF UK *„Analýza formulí pro kapitálovou přiměřenost neživotních pojišťoven*".
- Kapitálová přiměřenost – schopnost (povinnost) pojišťovny udržovat dostatečné množství kapitálu tak, aby byla schopna dostát svým závazkům.
- Data použitá pro výpočty obsahují jak data reálná, tak data smyšlená a tudíž by se z výsledků nemělo nic vyvozovat.

Solvency II a požadovaný kapitál

- Solvency II – projekt zabývající se problematikou požadovaného kapitálu pro pojišťovny. Zabývá se třemi pilíři
  – stanovením kapitálového požadavku pro pojišťovny,
  – stanovením pravidel pro vnitřní i vnější kontrolu výpočtu požadovaného kapitálu,
  – sdělováním informací o metodách, které pojišťovna používá.
- Cílem Solvency II je nalezení modelu pro stanovení požadovaného kapitálu pojišťovny. Model by měl zohlednit závislosti mezi jednotlivými riziky, kterým je pojišťovna vystavena.
- Minimální míra solventnosti používaná v současnosti v ČR vychází:
  – z objemu pojistného nebo
  – z objemu pojistného plnění

  a vazby mezi riziky nezohledňuje.

Pravděpodobnost ruinování a souvislost s požadovaným kapitálem

- Volný kapitál u – rozdíl celkových aktiv a závazků
- Požadovaný kapitál – množství kapitálu u, které zaručuje, že pojišťovna dostojí veškerým svým závazkům s danou pravděpodobností ε:

$$P(\Delta u < -\alpha u) \le \varepsilon$$

- Δu značí změnu volného kapitálu.
- Pro α = 1 dostáváme pravděpodobnost ruinování.

Rozklad změny volného kapitálu

- Změna volného kapitálu:

$$\Delta u = \Pi + U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

- Π - pojistné očištěné o zajištění

U_1 - technické riziko (odhad plnění za škody nastalé v aktuálním roce)

U_2 - riziko vývoje škodních rezerv - součet:
  - rozdílu škod zaplacených v aktuálním roce a rezervy vytvořené na tyto škody a,
  - rozdílu rezervy vypočtené na konci předchozího roku a na konci aktuálního roku, vztahující se na škody jiné než v aktuálním roce)

U_3 - riziko vývoje výnosové křivky (rozdíl odhadu pojistného plnění diskontovaného diskontním faktorem vztaženým k začátku aktuálního roku a odhadu pojistného plnění diskontovaného diskontním faktorem vztaženým ke konci aktuálního roku)

U_4 - investiční riziko

Schnieperův model I

- Model volného kapitálu, který zohledňuje závislosti mezi riziky prostřednictvím kovariancí.
- Úpravou vztahu z výše uvedeného slidu pro požadovaný kapitál dostaneme vztah pro výpočet potřebného volného kapitálu (alokovaného celkovému riziku)

$$u = -\frac{F^{-1}(\varepsilon)}{\alpha + E\left(\frac{\Delta u}{u}\right)}\sigma(\Delta u)$$

F - distribuční funkce normovaného normálního rozdělení
E - střední hodnota
σ - směrodatná odchylka

Schnieperův model II

- Kapitál alokovaný dílčímu riziku U_i

$$u_i = u \cdot \frac{\mathrm{Cov}(U_i, \Delta u)}{\sigma^2(\Delta u)}$$

- Platí: $u = \sum_i u_i$

Trojúhelník pojišťovnou zaplacených škod

- Pro modelování kovariancí využijeme nekumulativní trojúhelník zaplacených škod.

Zpoždění v zaplacení škody

Rok vzniku škody	0	1	2	3	4	5	6
-6	3511	3215	2266	1712	1059	587	340
-5	4001	3702	2278	1180	956	629	
-4	4355	3932	1946	1522	1238		
-3	4295	3455	2023	1320			
-2	4150	3747	2320				
-1	5102	4548					
0	6283						

Vyjadřuje škody vzniklé před rokem zaplacené ještě v roce vzniku

Modelování budoucích zaplacených škod - logaritmicko-lineární regrese I

- Označme $P_{i,j}$, i=-6,..0, j=0,..-i, jednotlivé prvky trojúhelníku

$\log P_{i,j} = Y_{i,j} = a_i + b_j + e_{i,j}$

a_i - parametr zohledňující rok vzniku škody
b_j - parametr zohledňující zpoždění v zaplacení škody
$e_{i,j}$ - náhodná chyba s normálním rozdělením N(0,σ²)

- Složky a_i a b_j seřadíme do vektoru, který označíme β:
$\beta = (a_{-6},..., a_0, b_0,..., b_6)^T$
- Složky $Y_{i,j}$ seřadíme do sloupcového vektoru Y.

Modelování budoucích zaplacených škod - logaritmicko-lineární regrese II

- Budeme-li chtít modelovat odhady škod, které ještě nebyly zaplaceny, doplníme trojúhelník na čtverec pomocí logaritmicko-lineární regrese.
- Odhadneme parametr $\boldsymbol{\beta}$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y}$$

- Matice $\boldsymbol{X}$ je taková, aby $E(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{X\beta}$.

Modelování budoucích zaplacených škod - logaritmicko-lineární regrese III

- Logaritmicko-lineární regresi můžeme využít také ke stanovení rezervy na škody, které budou zaplaceny v budoucnu. Rezervy se určí jako součet hodnot v doplněném trojúhelníku.
- Hodnoty doplněného trojúhelníka určíme jako:

$$\hat{P}_{i,j} = \exp\left(\hat{a}_i + \hat{b}_j + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)$$

Modelování budoucích zaplacených škod - logaritmicko-lineární regrese IV

- Doplněný trojúhelník potom obsahuje následující hodnoty:

	1	2	3	4	5	6
-5						335,39
-4					663,60	367,36
-3				1055,20	610,83	338,15
-2			1513,00	1140,90	660,47	365,63
-1		2746,80	1824,40	1375,70	796,38	440,87
0	5632,1	3379,00	2244,30	1692,40	979,67	542,33

Odhad škod, které bude třeba zaplatit za rok za škody, které nastaly letos.

Modelování rizik U_i

- Rizika U_i jsou modelována jako náhodné veličiny s logaritmicko-normálním rozložením.
- Při výpočtu byly využity nekumulativní trojúhelníky zaplacených škod na začátku roku s odhady:

$$\hat{P}_{i,j}$$

a nekumulativní trojúhelníky na konci roku s odhady škod:

$$\tilde{Q}_{i,j}$$

- Použili jsme Vašíčkův model okamžité úrokové intenzity vztažený k počátku běžného období a ke konci běžného období, $v_0(t)$ a $v_1(t)$ reprezentují příslušné diskontní faktory.

Modelování změny volného kapitálu

$$\Delta u = \Pi + U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

$$\Delta u = \Pi -$$

model rizika U_1 → $-P_{1,0} - \sum_{j=1}^{r} \tilde{Q}_{1,j} v_1(j-1) -$

model rizika U_2 → $-\sum_{i=0}^{r-1} (P_{-i,i+1} - \hat{P}_{-i,i+1}) + \sum_{\substack{i+j>1 \\ i=0,\dots,-(r-2)}} (\hat{P}_{i,j} - \tilde{Q}_{i,j}) v_1(i+j-2) +$

model rizika U_3 → $+\sum_{i+j>1} \hat{P}_{i,j}(v_0(i+j-1) - v_1(i+j-2)) +$

model rizika U_4 → $+\sum_k R_k A_k,$

Výpočet kovariancí

- Kovariance potřebné pro výpočet volného kapitálu alokovaného celkovému riziku

$$u = -\frac{F^{-1}(\varepsilon)}{\alpha + E\left(\frac{\Delta u}{u}\right)} \sigma(\Delta u)$$

a dílčím rizikům

$$u_i = u \cdot \frac{Cov(U_i, \Delta u)}{\sigma^2(\Delta u)}$$

určíme na základě modelů jednotlivých rizik (viz předchozí slide).

Požadovaný kapitál pro jednotlivá rizika v závislosti na pravděpodobnosti ruinování

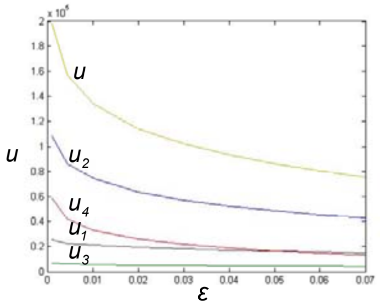
Pravděpodobnost ruinování	Celkový kapitál	Kapitál alokovaný jednotlivým rizikům			
		Technické riziko	Riziko vývoje škodních rezerv	Riziko vývoje výnosové křivky	Riziko investiční
ε	u	u_1	u_2	u_3	u_4
0,001	189 959	26 264	98 038	7 064	58 594
0,0045	149 703	23 847	77 601	6 404	41 853
0,01	127 745	22 185	66 415	5 953	33 193
0,02	108 200	20 429	56 428	5 478	25 866
0,03	96 491	19 220	50 428	5 151	21 692
0,04	88 027	18 260	46 081	4 892	18 793
0,05	81 357	17 445	42 650	4 673	16 589
0,06	75 828	16 726	39 801	4 480	14 821
0,07	71 092	16 077	37 357	4 305	13 353

Pro porovnání:
Hodnota škod zaplacených v aktuálním roce je 11 946

Interpretace výsledků

- Z předchozí tabulky vidíme, že největší roli hraje riziko vývoje škodních rezerv.
- Riziko technické a investiční je významné.
- Riziko vývoje výnosové křivky je v porovnání s ostatními riziky zanedbatelné.
- Množství požadovaného kapitálu roste s klesající pravděpodobností ruinování.

Graf závislosti požadovaného kapitálu pro jednotlivá rizika na pravděpodobnosti ruinování ε



Závěrem

- Schnieperův model nabízí možné řešení výpočtu požadovaného kapitálu.
- Výpočet nevyžadoval žádná speciální nebo běžně nedostupná data.
- Použit software Matlab 7.0.1.

Použitá literatura

- Christofides, S.: Regression models based on log-incremental payments, Claims Reserving Manual II., Institute and Faculty of Actuaries, London, 1990.
- Hůdová, K.: Analýza formulí pro kapitálovou přiměřenost neživotních pojišťoven, diplomová práce, MFF UK, Praha, 2006.
- Mandl, P.: Rozptyl škodních nákladů a solvenční kapitálový požadavek - předneseno na semináři z aktuárských věd, MFF UK, Praha, 10.3.2006.
- Mandl, P.: Stochastické finanční modely - předneseno na semináři z aktuárských věd, MFF UK, Praha, 2002.
- Pilcová, D.: Matematicko-statistická analýza metod sledování solventnosti, disertační práce, MFF UK, Praha, 2001.
- Schnieper, R.: Solvency testing, Mitteilungen der Schweiz. Aktuarvereinigung, Heft 1/1999, str. 11-45, 1999.

Děkuji Vám za pozornost…

…a prosím Vaše dotazy.

Klára Hůdová
Analytik
Advanced Risk Management, s.r.o.
tel.: 00420-257-290-252
fax: 00420-257-290-473
e-mail: hudova@arm.cz
www.arm.cz