



Ministerstvo financí
ČESKÉ REPUBLIKY

Česká výnosová křivka od roku 1999 do současnosti

Kamil Kladívko

email: kamil.kladivko@mfcz.cz nebo kladivko@gmail.com

***Odbor řízení státního dluhu a finančního majetku, MF ČR
Fakulta informatiky a statistiky VŠE, Praha***

Podpořeno grantem IGA VŠE, č. 26/08



Státní dluhopisy a výnosová křivka České republiky

Ministerstvo financí ČR emituje státní domácí dluhopisy (SDD):

- **Kupónové dluhopisy (roční výplata kupónu) se splatnostmi 3 až 30 let**
- **V současné době v oběhu 17 titulů SDD o celkové nominální hodnotě 801 mld. Kč**
- **Pravidelné aukce pro primární dealery (12 bank)**
- **Likvidní sekundární trh zajišťuje tržní ceny SDD každý obchodní den**

Tržní ceny SDD determinují „benchmarkovou“ výnosovou křivku České republiky

Výnosová křivka (časová struktura úrokových měr):

- **Základní prvek při oceňování aktiv i pasiv**
- **Ovlivňuje ekonomická a investiční rozhodování**
- **Jednoznačně určena cenami bezkupónových dluhopisů, neboli diskontními faktory**
- **Z cen bezkupónových dluhopisů lze snadno dopočítat spotové (bezkupónové), parové a forwardové sazby**



Model výnosové křivky

Výnosová křivka není na trhu přímo pozorovatelná, neboť bezkupónové dluhopisy nejsou emitovány. Ke konstrukci výnosové křivky potřebujeme model

Nelson-Siegel (1987) model:

- Parametrický model, který je schopen s jen 4 parametry produkovat rozličné tvary výnosové křivky
- Značně oblíbený mezi centrálními bankami a makroekonomy - dostatečně přesný, ale produkuje dostatečně hladké křivky, tj. ponechává prostor pro idiosynkratické pohyby cen SDD
- Svensson (1995) rozšířil model o další dva parametry – pro česká data fitují konvexitu dlouhých splatností (30 let)
- Parametrizace modelů má vhodné limitní chování (pro splatnosti jdoucí k nekonečnu, respektive k 0) a jednoznačný vztah mezi forwardovými a spotovými sazbami



Nelson-Siegel spotová sazba a cena dluhopisu

Cena kupónového dluhopisu (splatnost τ_n let):

$$(1) P(\tau_n) = \sum_{i=1}^n C \delta(\tau_i) + 100 \delta(\tau_n), \text{ kde: } \begin{array}{l} C \text{ je výplata kupónu v Kč} \\ \delta(\tau_i) \text{ je diskontní faktor se splatností } \tau_i \text{ let} \\ 100 \text{ je nominální hodnota dluhopisu v Kč} \end{array}$$

Vztah mezi bezkupónovým dluhopisem a spotovou sazbou (spojité úročení):

$$(2) \delta(\tau) = e^{-r(\tau)\tau}, \text{ kde: } \begin{array}{l} \delta(\tau) \text{ je diskontní faktor (cena bezkupónového dluhopisu) o splatnosti } \tau \text{ let} \\ r(\tau) \text{ je spotová (bezkupónová sazba) o splatnosti } \tau \text{ let} \end{array}$$

Nelson-Siegel spotová sazba:

$$(3) r(\tau) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right), \text{ kde: } \beta_0, \beta_1, \beta_2, \lambda \text{ jsou parametry modelu, které potřebujeme odhadnout}$$

Teoretickou (modelovou) cenu \hat{P} kupónového dluhopisu vypočteme dosazením (3) do (2) a dále do (1)



Odhad modelu

Parametry odhadneme přiblížením teoretických cen k pozorovaným:

$$(4) \quad (\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \widehat{\lambda}) = \arg \min_{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \lambda} \sum_{i=1}^N \left(\frac{P_i - \widehat{P}_i}{D_i^M} \right)^2, \text{ kde:}$$

P_i je pozorovaná tržní cena SDD
 \widehat{P}_i je teoretická (modelová) cena SDD
 D_i^M je modifikovaná durace SDD
 N je počet dostupných SDD

Pro řešení (4) používám funkci LSQNONLIN z Optimization Toolbox

Minimalizace dle (4) je přibližně rovna minimalizaci součtu čtverců odchylek teoretických výnosů do splatnosti od pozorovaných výnosů do splatnosti (Plyne z lineární aproximace relativní změny ceny vzhledem ke změně výnosu do splatnosti, kterou lze vyjádřit pomocí modifikované durace)

Výnos do splatnosti (YTM) kupónového dluhopisu:

$$P(\tau_n) = \sum_{i=1}^n \frac{C}{(1 + YTM)^{\tau_i}} + \frac{100}{(1 + YTM)^{\tau_n}}, \text{ kde:}$$

C je výplata kupónu v Kč
 YTM je výnos do splatnosti (yield to maturity)
 100 je nominální hodnota dluhopisu v Kč

Výnos do splatnosti je konstantní sazba, která diskontuje cash flow dluhopisu tak, že jejich součet je roven ceně dluhopisu. Výnos do splatnosti ale není vhodným reprezentantem výnosové křivky (kupónový efekt, reinvestice kupónů)



Ukázka odhadu – výnosová křivka 4.1.1999 a 5.1.2009

Dosažením odhadnutých parametrů do (3) spočteme spotové sazby pro libovolnou splatnost. Ze spotových sazeb můžeme snadno dopočítat diskontní faktory a dále parové a forwardové sazby. Odhadli jsme tak výnosovou křivku

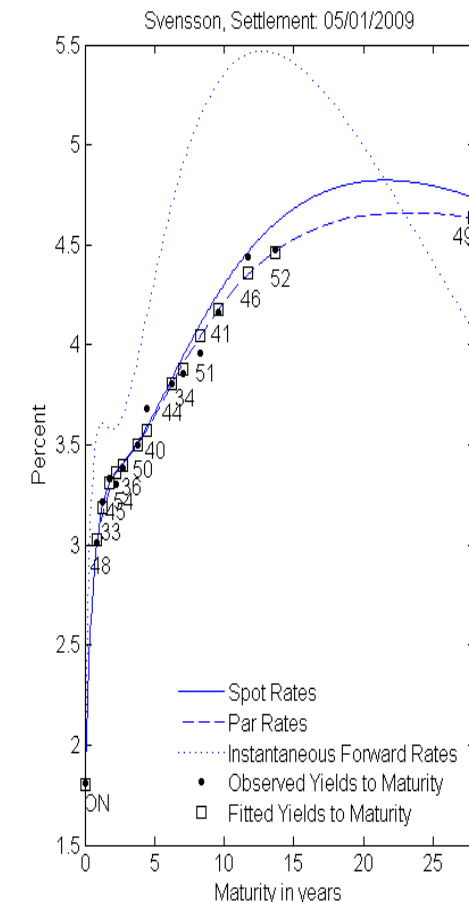
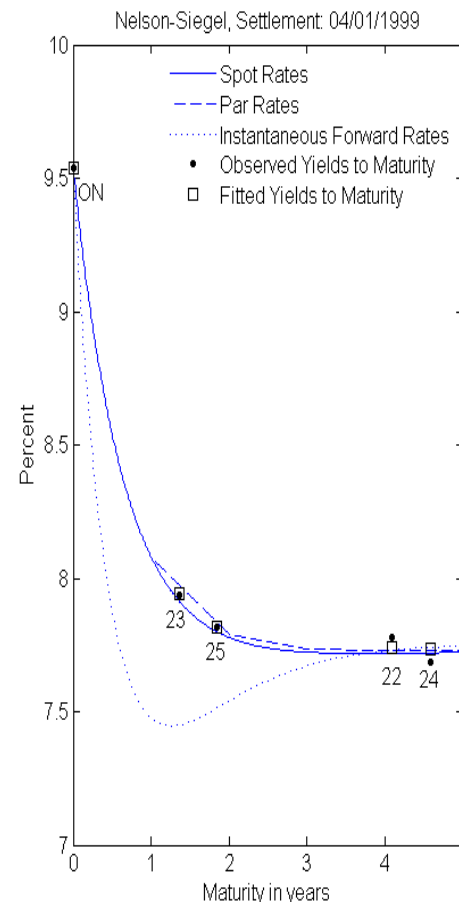
4.ledna 1999 (Nelson-Siegel)

- Invertovaná křivka
- Pouze 4 SDD
- Max. splatnost 4,6 roku
- YTM RMSE = 2,7 bp (basický bod)
- YTM MaxAbs Error = 5,1 bp

5.ledna 2009 (Svensson)

- Klasicky rostoucí křivka (ale nadprůměrně strmá)
- 15 SDD
- Max. splatnost 27,9 roku
- YTM RMSE = 4,4 bp
- YTM MaxAbs Error = 10,5 bp

Krátký konec křivky fitován k sazbě Overnight PRIBOR (ON)



Čísla pod YTM značkami označují tzv. číslo emise SDD

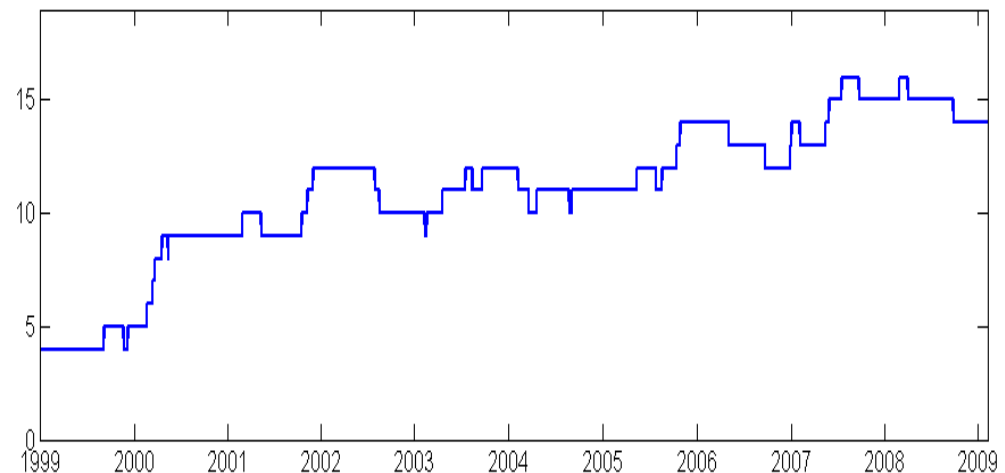


Výnosová křivka od 1999 do současnosti: Data

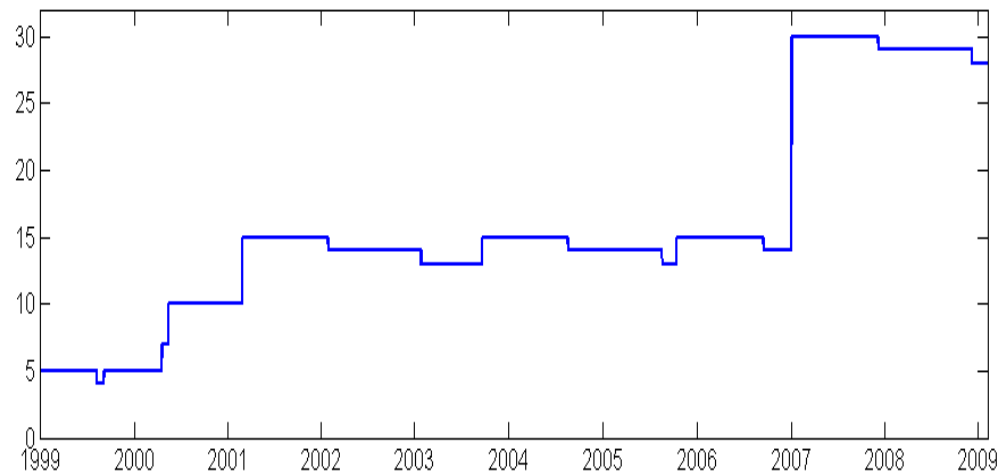
Tržní ceny SDD poskytuje Burza cenných papírů Praha:

- Cena stanovena jako průměr kotací dodaných primárními dealery
- Od 4.1.1999 do 9.2.2009 celkem 2 535 obchodních dnů a 27 853 pozorování cen SDD
- Chybějící pozorování (110) nahrazují cenou z předchozího dne
- SDD vyřazují 180 dnů před jeho splatností (nespolehlivé ceny)
- SDD zařazují 30 dnů po první tranši (nespolehlivé ceny)
- Vyřazují SDD 4,85%/2057 (nelikvidní) a SDD 6,08%/2001 (systematicky předraženy)

Vývoj počtu SDD použitých při odhadu výnosové křivky
Number of Bonds Used for Estimation



Vývoj maximální splatnosti SDD
Maximal Time to Maturity Spanned by the Bonds

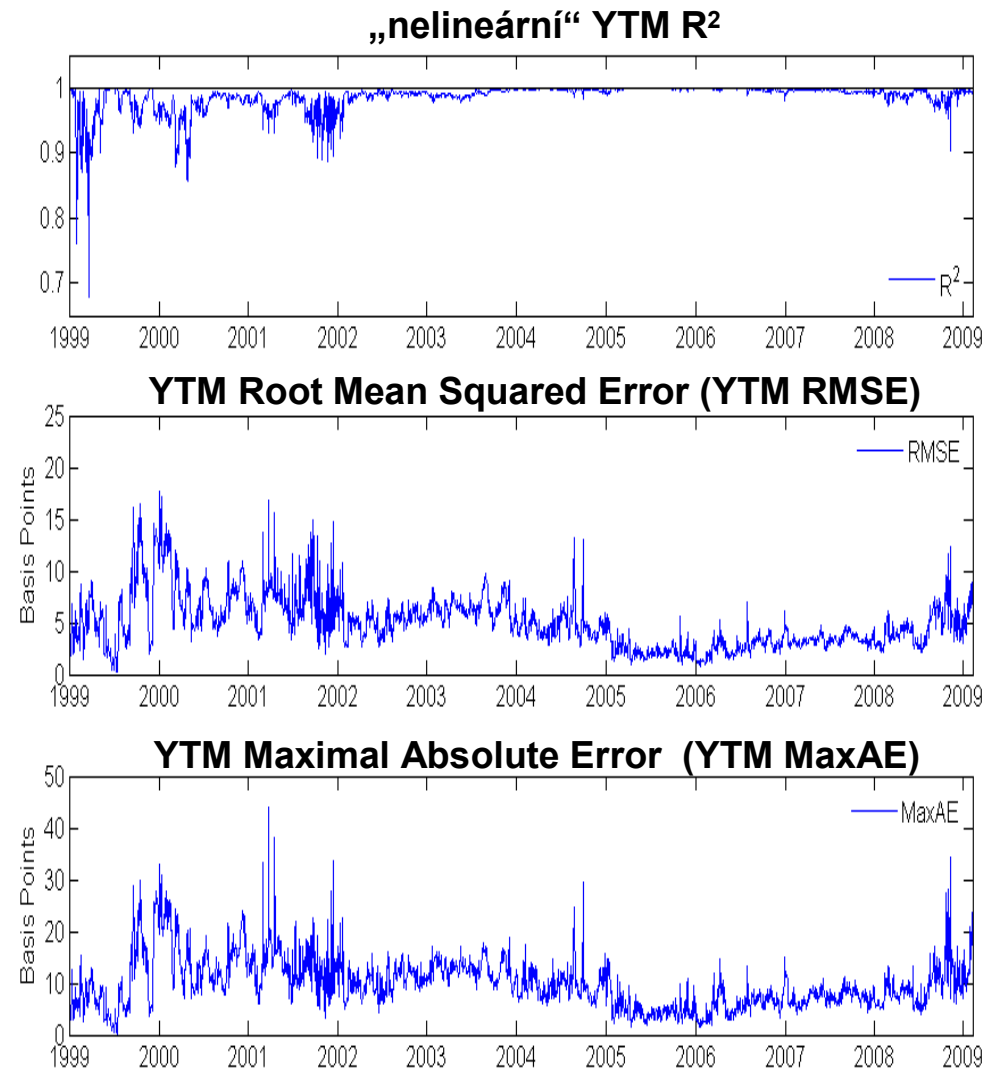




Výnosová křivka od 1999 do současnosti: Kvalita fitu

Odhad proveden pro každý obchodní den od 4.1.1999 do současnosti:

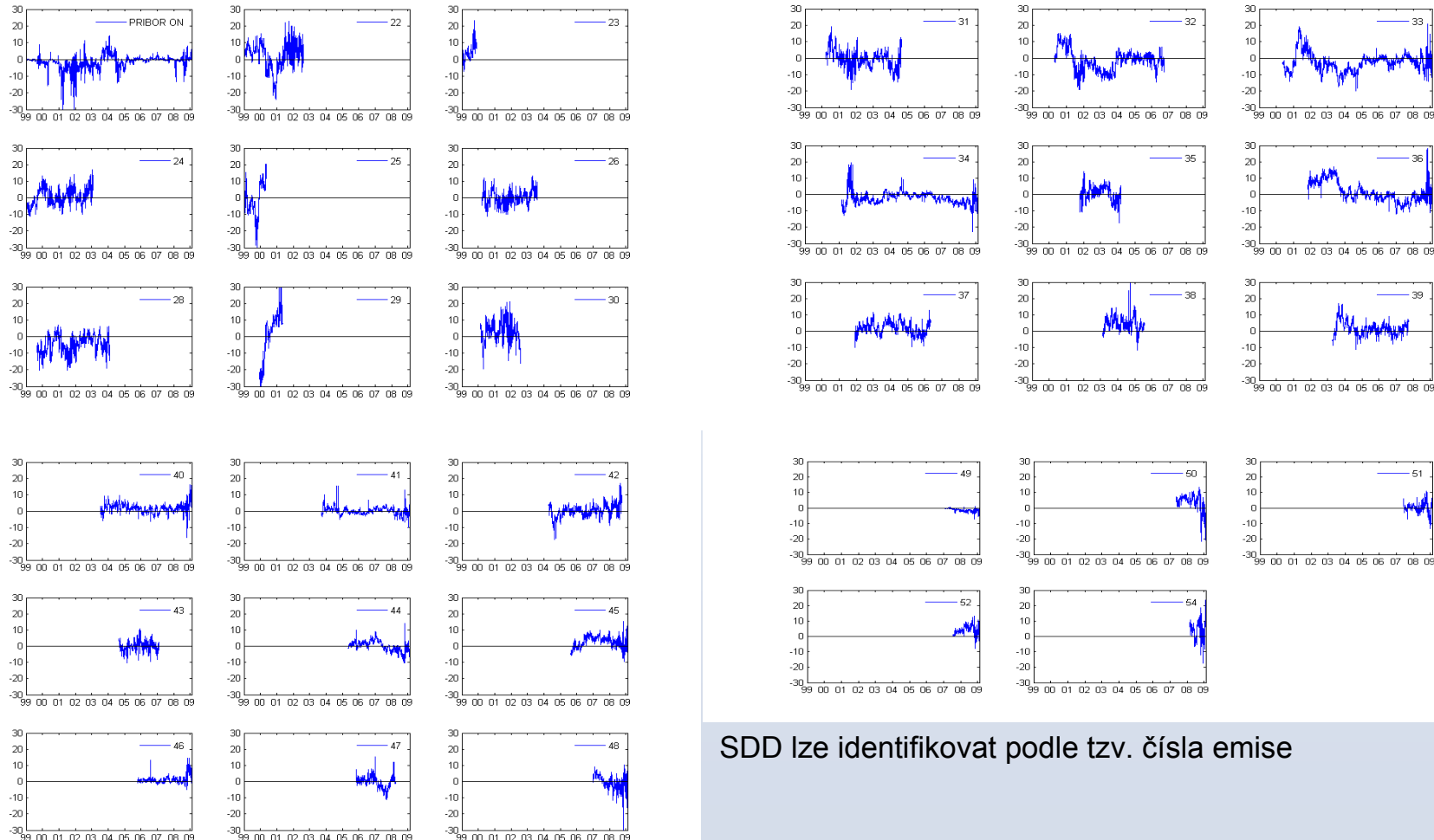
- Do 1.9.2005 používám Nelson-Siegel model a od 1.9.2005 Svensson model, který je schopen fitovat efekt konvexity (výrazně konkávní křivka) 30-leté splatnosti
- Od poloviny 2002 do začátku 2008 výborný fit (YTM R^2 téměř 1)
- Během současné finanční krize (od začátku 2008) zhoršení fitu (nízká likvidita a aktivita trhu)
- Longitudinální průměrná YTM RMSE je pouze 5 bp
- Maximální YTM RMSE je 18 bp
- Maximální absolutní chyba (YTM MaxAE) je 44 bp (chybná kotace?)





Výnosová křivka od 1999 do současnosti: YTM rezidua

Individuální YTM chyby (rezidua mezi pozorovanými a predikovanými YTM) pro každý SDD použitý při odhadu. Ideálně by měly oscilovat kolem 0

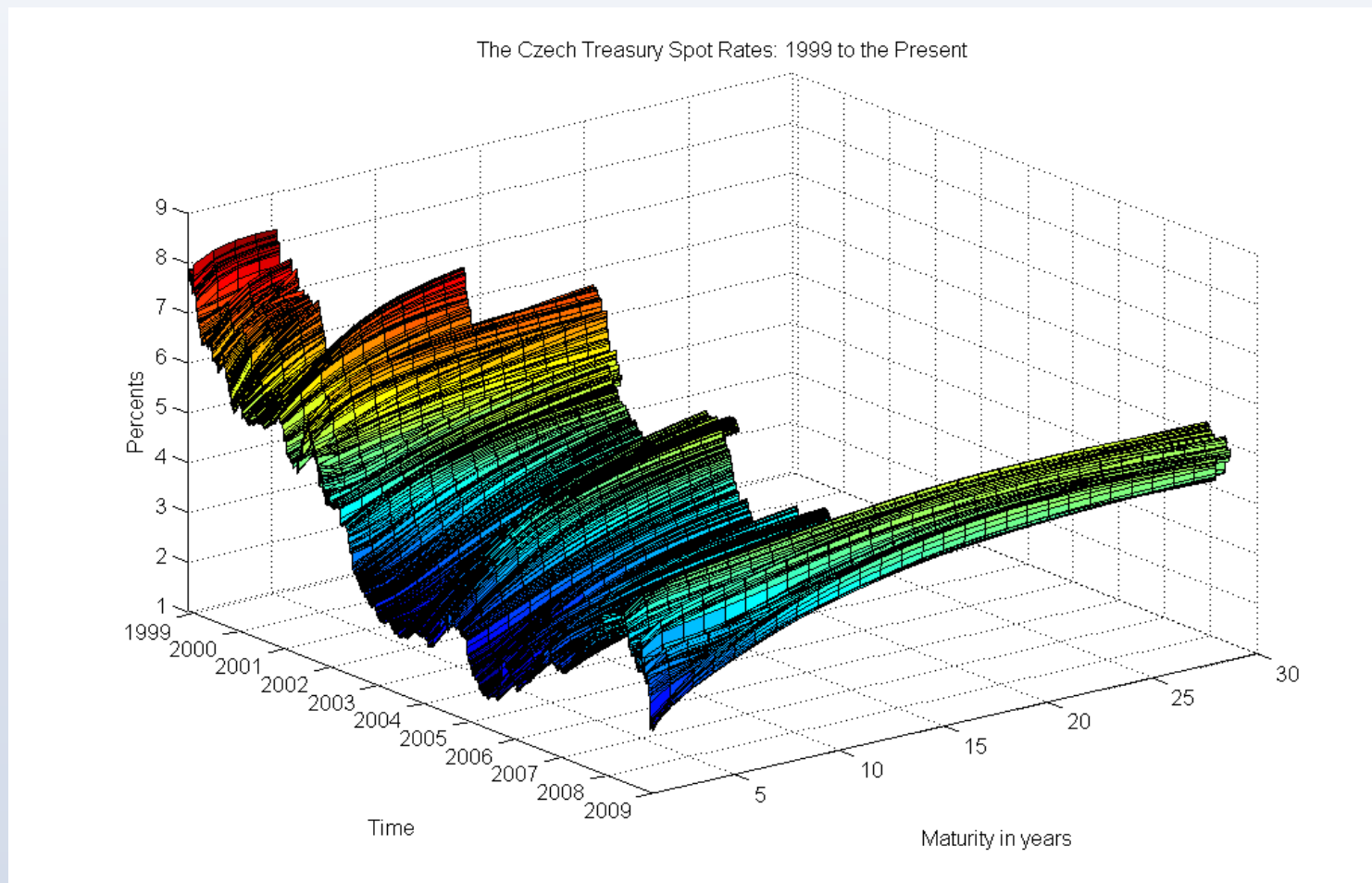


SDD lze identifikovat podle tzv. čísla emise



Výnosová křivka od 1999 do současnosti

Odhadnuté bezkupónové výnosové křivky (spojité úročení) pro každý obchodní den od 4.1.1999 do 9.2.2009. Nejkratší vykreslená splatnost 1 rok. Nejdelší splatnost je určena maximální splatností SDD, který byl použit při odhadu



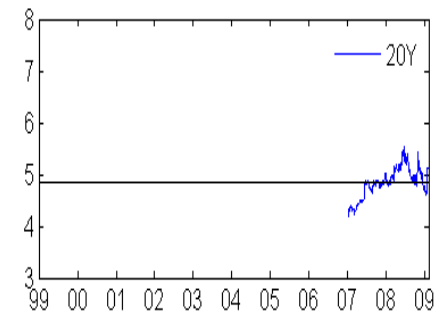
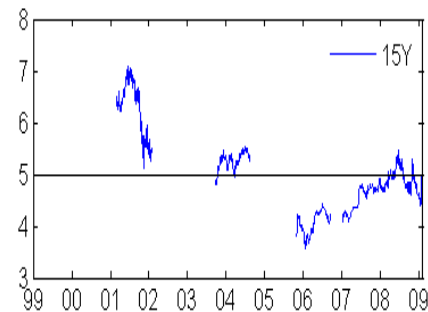
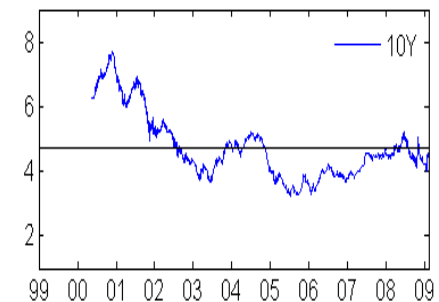
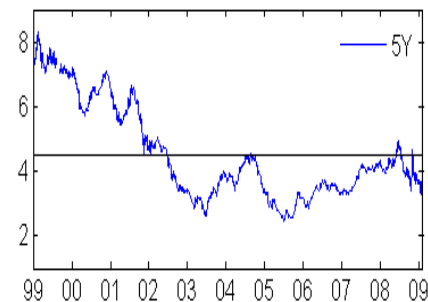
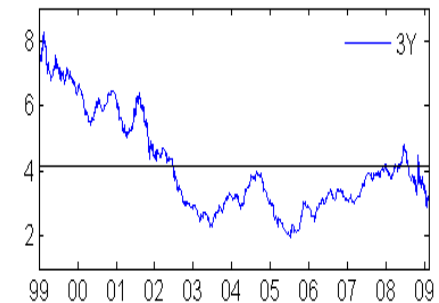
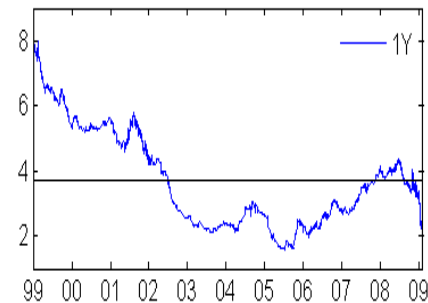


Výnosová křivka od 1999 do současnosti: Spotové sazby

Časové řady vybraných splatností odhadnutých spotových sazeb:

- Do poloviny 2005 klesající trend
- Od poloviny 2005 do poloviny 2008 návrat k nepodmíněné střední hodnotě (mean reversion)
- Invertní křivka pouze v lednu 1999, jinak rostoucí
- Od 3.čtvrtletí 2008 křivka výrazně strmá (vysoká riziková prémie?)

Spot Rates (Percents, Continuous Compounding, 30E/360) Derived from the Czech Government Bonds Prices



Horizontální úsečka reprezentuje nepodmíněnou střední hodnotu



Odhadnuté SDD parové sazby versus swapové sazby

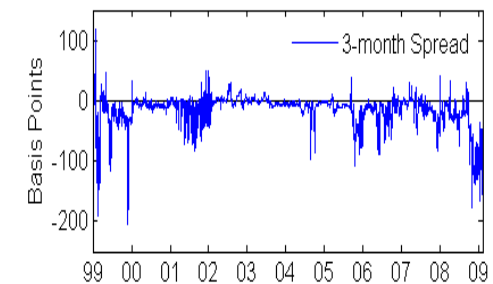
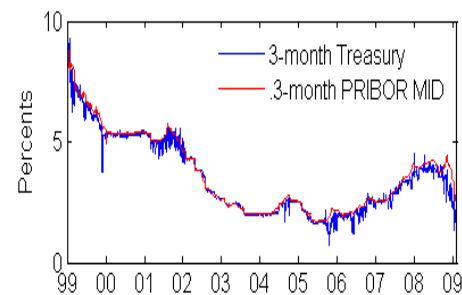
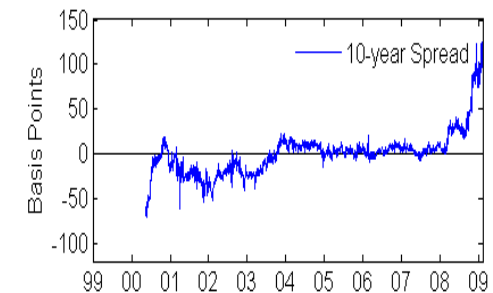
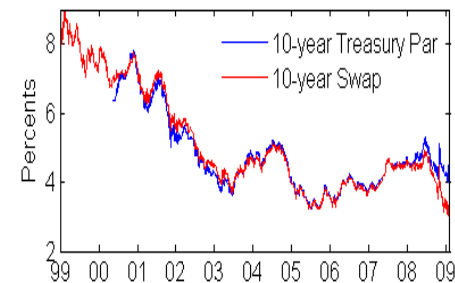
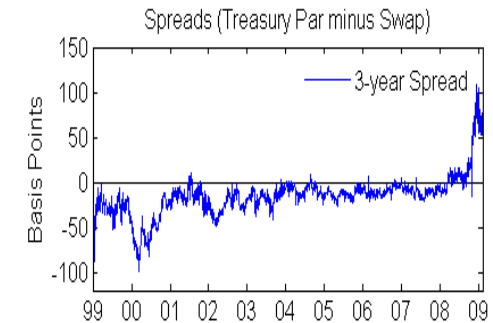
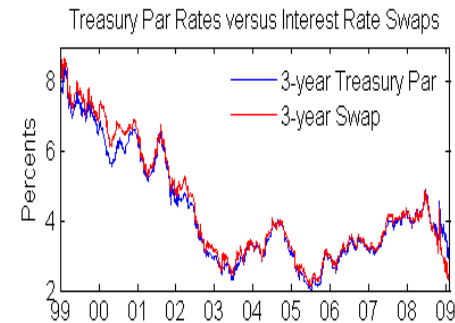
Alternativou k výnosové křivce odhadnuté z cen SDD je výnosová křivka tvořená kotacemi úrokových swapů

Úrokový swap:

- Denní kotace parových sazeb (výše kupónové sazby, kterou by měl dluhopis při ceně přesně 100).
- Swap je pouze dohoda o výměně cash flow, nejedná se o dluhový instrument, tedy oproti dluhopisu relativně nízké riziko ztráty při defaultu

Z obrázku je zřejmé:

- Dynamika parových sazeb SDD kopíruje dynamiku swapů, což stvrzuje „kvalitu“ odhadnutých sazeb
- Velmi nízké spready z období 2001-2007 prudce rostou během současné finanční krize. Výrazná kreditní přírážka SDD
- 3-měsíční SDD sazba je příliš volatilní vzhledem k 3M PRIBOR (dáno použitím Overnight PRIBOR při odhadu). SDD sazby jsou tak smysluplné od splatnosti 1 rok



Spread = Par SDD - Par Swap



Výnosová křivka od 1999 do současnosti: Shrnutí

Model Nelson-Siegel (Svensson) velmi přesně fituje tržní ceny SDD každý obchodní den:

- Velmi nízké chyby (RMSE, MaxAE) při relativně malém počtu parametrů
- Malý počet parametrů umožňuje odhadnout výnosovou křivku pro nízký počet kotovaných SDD
- Model nejeví známky „přefitování“ (výrazně vybočující kotace nejsou fitovány)
- Odhadnuté výnosové křivky jsou dostatečně přesné a zároveň dostatečně hladké

Výsledkem jsou denní časové řady „benchmarkové“ výnosové křivky české ekonomiky, které doposud nebyly k dispozici:

- Oceňování finančních instrumentů
- Použití ve výzkumu (empirické finance, makroekonomie) jako tzv. „research data“
- Data budou pravidelně aktualizovány na internetu

Děkuji za pozornost