

PROSTOROVÁ STATISTIKA V MATLABU

JIŘÍ MILITKÝ,

Katedra textilních materiálů, Technická universita v Liberci,
461 17 Liberec

Abstrakt:

Jsou uvedeny základní možnosti popisu dat, kde hraje významnou roli jejich prostorové uspořádání. Tato data se chápou jako náhodné pole a pro popis jeho variability se používá momentových charakteristik druhého řádu. Je diskutováno použití *prostorové kovariance* (globální variabilita) a méně známého *variogramu* (lokální variabilita) resp. jeho variant. Jsou uvedeny možnosti vyjádření prostorové autokorelace pomocí vhodných indexů. Na příkladu výpočtu variogramu jsou uvedeny možnosti realizace výpočtů v jazyku Matlab 5.3 využívající maticovou orientaci resp. zajišťující maximální universalitu.

1. Úvod

Celá řada měření z oblasti životního prostředí je závislá na místě a čase (prostorově časové proměnné). Speciálně prostorová variabilita leží v popředí zájmu při sledování šíření znečištění v vzduší resp. v půdě. Prostorová resp. plošná variabilita geometrických resp. jiných vlastností je charakteristikou kvality materiálů a rozhoduje o jejich praktickém použití. V oblasti analytické chemie ovlivňuje prostorová nehomogenita způsob vzorkování a interpretaci výsledků analýz. Z toho všeho je zřejmé, že vyjádření prostorové variability je poměrně frekventovanou úlohou. Prostorová variabilita se popisuje pomocí momentových charakteristik pomocí druhého řádu. Využívá se buď indexů prostorové autokorelace nebo kovariance a variogramu. Dá se ukázat, že tyto charakteristiky prostorové variability spolu úzce souvisí. Navržené charakteristiky jsou použity v programech vytvořených v jazyce Matlab 5.3. Jejich použití je demonstrováno na příkladu z oblasti vyjádření variability plošné hustoty speciálních netkaných textilií [1,2].

2. Základní pojmy

Prostorová variabilita se využívá pro charakterizaci závislostí (resp. prostorové blízkosti) mezi množinou N lokalit (ale také bodů, míst, poloh) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_N$ a hodnotami z_1, z_2, \dots, z_N nějaké veličiny z měřené na jednotlivých lokalitách. Lokality mohou být charakterizovány svojí polohou na mapě, těžištěm atd. Pokud jde o body bývají charakterizovány svými souřadnicemi, tj. $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$. Jednotlivé lokality mohou tvořit pravidelnou nebo nepravidelnou síť. Podobně i bodové množiny mohou být pravidelné nebo jinak uspořádané. Veličina z může být kardinální nebo nominální (např. přítomnost nebo nepřítomnost stopového prvku). Omezme se na kardinální data (např. koncentrace škodlivin v ovzduší), i když se dá prakticky stejný aparát použít také pro nominální data..

Uvažujme náhodné pole $z(\mathbf{x})$ se složkami $z_i = z(\mathbf{x}_i) = z(x_i, y_i)$ určené v p -tici bodů \mathbf{x}_i umístěných v oblasti D . Tyto body mohou tvořit mřížku tj. rektangulární rovnoměrnou síť nebo mohou být uspořádány nerovnoměrně. (např. v rámci geografické mapy). Kromě prostorové závislosti může být uvažována také časová závislost (viz [3].), která je běžná např. v meteorologických výzkumech. Pak se pole $z(\mathbf{x}_i, t)$ chápe jako p – rozměrná náhodná veličina s „nezávislými“ realizacemi $t = 1, T$. Náhodné pole $z(\mathbf{x})$ je jednoznačně charakterizováno p rozměrnou hustotou pravděpodobnosti

$$p_n(z_1, z_2, \dots, z_n) = P\{z_i \leq z(\mathbf{x}_i) \leq z_i + dz_i, \quad i = 1..n\} \quad (1)$$

Důležitý je pojem *homogenní náhodné pole*, které je invariantní vůči posunu. V případě prostorově-časových polí se obvykle uvažuje časová homogenita.

Střední hodnota $m(\mathbf{x}_i) = E(z_i)$ náhodného pole v místě \mathbf{x}_i je definována vztahem

$$E(z_i) = \int z_i p(z_i) dz_i \quad (2)$$

Pro vyjádření variability se standardně používá *kovariance* jako druhý smíšený centrální moment

$$C_{ij} = \iint (z_i - E(z_i))(z_j - E(z_j)) p(z_i, z_j) dz_i dz_j$$

resp.

$$C_{ij} = E(z(\mathbf{x}_i) * z(\mathbf{x}_j)) - E(z(\mathbf{x}_i)) * E(z(\mathbf{x}_j)) \quad (3)$$

Pro případ, kdy jsou oba body \mathbf{x}_i a \mathbf{x}_j totožné resultuje z rov. (3) rozptyl $D(\mathbf{x}_i)$, který lze vyjádřit ve tvaru

$$D(z(\mathbf{x}_i)) = C_{ii} = E(z(\mathbf{x}_i)^2) - (E(z(\mathbf{x}_i)))^2 \quad (4)$$

Speciálně pro vyjádření prostorové nepodobnosti mezi hodnotami v místech \mathbf{x}_i a \mathbf{x}_j byl zaveden *variogram* resp. *semivariogram*, který je definován jako polovina rozptylu přírůstku $(z(\mathbf{x}_i) - z(\mathbf{x}_j))$ [4]

$$\Gamma_{ij} = 0.5 * D[z(\mathbf{x}_i) - z(\mathbf{x}_j)]$$

resp.

$$\Gamma_{ij} = 0.5 * [E(z(\mathbf{x}_i) - z(\mathbf{x}_j))^2 - (E(z(\mathbf{x}_i) - z(\mathbf{x}_j)))^2]$$

Pro *stacionární* náhodné pole je střední hodnota v jednotlivých bodech konstantní tj. $E(z(\mathbf{x}_i)) = m$. Pak je

$$\Gamma_{ij} = 0.5 * E(z(\mathbf{x}_i) - z(\mathbf{x}_j))^2 \quad (5)$$

Pro *homogenní náhodné pole* je kovariance funkcí pouze vzdálenosti mezi body $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ a $\mathbf{x}_j = (x_j, y_j)$, tedy

$$C_{ij} = C(x_i - x_j, y_i - y_j)$$

Pro *isotropní náhodné pole* je kovariance invariantní vůči rotaci a zrcadlení. Závisí pak pouze na délce $d = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$

Důležitou vlastností řady náhodných polí je *stacionarita druhého řádu*. Náhodné pole $z(\mathbf{x})$ má vlastnosti stacionarity druhého řádu pokud platí, že:

- Průměrná hodnota je konstantní, tj. nezávislá na poloze vektoru \mathbf{x} . Tedy $E(\mathbf{x}) = m$.
- Pro každou dvojici náhodných proměnných $z(\mathbf{x})$ a $z(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ závisí kovariance pouze na přírůstkovém vektoru \mathbf{h}

$$C(\mathbf{h}) = E[z(\mathbf{x}) * z(\mathbf{x} + \mathbf{h})] - m^2 \quad (6)$$

Pro rozptyl pak platí, že

$$D(z(\mathbf{x})) = C(\mathbf{h} = 0) = C(0) \quad (7)$$

a variogram souvisí přímo s kovariancí podle vztahu

$$\Gamma(\mathbf{h}) = C(0) - C(\mathbf{h})$$

resp.

$$C(0) = C(\mathbf{h}) + \Gamma(\mathbf{h}) \quad (8)$$

Pro případ satacionarity druhého řádu je tedy celková variabilita vyjádřena rozptylem $C(0)$ součtem globální složky vyjádřené prostorovou kovariancí $C(\mathbf{h})$ a lokální složky vyjádřené variogramem $\Gamma(\mathbf{h})$.

Až na násobivou konstantu je poměr $\Gamma(\mathbf{h})/C(0)$ roven Gearyho autokorelačnímu koeficientu a poměr $C(\mathbf{h})/C(0)$ je roven Moranovu autokorelačnímu koeficientu. Je tedy patrné, že stacionarita druhého řádu umožňuje nalezení souvislosti mezi složkami prostorové variability a prostorové autokorelace. Jde pak o prakticky ekvivalentní nástroje pro popis náhodných polí.

V obecném případě však tyto vztahy neplatí a je třeba volit vhodné vyjádření prostorové variability. Pokud neplatí předpoklad konstantnosti střední hodnoty je „necentrováný“ variogram méně vhodný, protože je vychýlený. Dá se použít jeho centrovaná verze

$$\Gamma_{ij} = 0.5 * D[(z(\mathbf{x}_i) - E(z_i)) - (z(\mathbf{x}_j) - E(z_j))] \quad (9)$$

která již nevyžaduje prostorovou konstantnost střední hodnoty.

Rov.(8) indikuje, že stacionarita druhého řádu vede k požadavku spojitosti variogramu v počátku, protože $\Gamma(0) = 0$. Pokud vyjde, že $\Gamma(0) = c_0 > 0$, znamená to neplatnost stacionarity druhého řádu. Parametr c_0 se označuje jako nugget efekt (důsledek variací malého dosahu v blízkosti počátku). Pokud je $\Gamma(\mathbf{h}) = const.$ pro všechna \mathbf{h} je náhodné pole $z(\cdot)$ v tomto směru nekorelované.

Závislost $\Gamma(\mathbf{h})$ na \mathbf{h} se dá vyjádřit celou řadou parametrických modelů Často se používá sférický model vyjádřitelný ve tvaru

$$\begin{aligned} \Gamma(h) &= c_0 + c[1.5(h/a) - 0.5(h/a)^3] \quad \text{for } 0 \leq h \leq a \\ \Gamma(h) &= c_0 + c \quad \text{for } h > a \end{aligned} \quad (10)$$

kde h je délka vektoru \mathbf{h} . Rozdělení variogramu a jeho vlastnosti jsou popsány v knize [5], kde jsou také uvedeny způsoby jeho odhadu.

Pokud je sledované náhodné pole důsledkem kombinace několika nezávislých zdrojů s přibližně stejným rozdělením je možno popsat $z(\mathbf{x})$ pomocí vícerozměrného *Gaussova* (normálního) rozdělení. Pak má tedy rozdíl $[z(\mathbf{x}) - z(\mathbf{x}+\mathbf{h})]$ normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem $2\Gamma(\mathbf{h})$.

3. Výběrová kovariance a variogram

Pro odhad variogramu lze v případě prostorově časových dat použít sumarizaci přes časovou proměnnou a nalézt odhad ve tvaru,

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2T} \sum_{t=1}^T (z(x_i, t) - z(x_j, t))^2 \quad (11)$$

Jeho rozptyl je roven

$$D(\gamma_{ij}) = \frac{2}{T} \Gamma_{ij}^2 \quad (12)$$

Pro případ konstantní střední hodnoty je pak

$$D(\gamma_{ij}) = \frac{2}{T} (0.5 * (c_{ii}^2 + c_{jj}^2) - c_{ij}^2) \quad (13)$$

Odhad kovariance se v tomto případě vyčísluje podle vztahu

$$c_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (z(x_i, t) - z_{pi}) * (z(x_j, t) - z_{pj}) \quad (14)$$

Odhad střední hodnoty je počítán ze vztahu

$$z_{pi} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (z(x_i, t)) \quad (15)$$

Pro rozptyl odhadu kovariance platí, že

$$D(c_{ij}) = \frac{1}{T} (c_{ii}^2 * c_{jj}^2 + c_{ij}^2) \quad (16)$$

Dá se ukázat, že pro případ vysoké korelace mezi složkami náhodného pole (již od korelačního koeficientu 0.27) je výhodnější použít variogram, protože jeho odhad je efektivnější. Takto definované odhady umožňují posouzení variability resp. míry neshody mezi jednotlivými body v oblasti D .

Pro případ, kdy se sleduje pouze prostorová proměnná (nejsou k dispozici opakování v různých časech) se provádí sumace s ohledem na délku a orientaci přírůstkového vektoru

(obvyčejně se volí pro neregulární síť tolerance délek a směrů, které se považují za přibližně stejné). Takto počítané odhady již posuzují spíše prostorovou autokorelaci, protože se počítají přes celou oblast D . Pro mřížkové uspořádání je volen přírůstkový vektor jako násobek délky a výšky jednotkové cely, takže odpadá potřeba stanovení tolerance. *Výběrový směrový variogram* ve směru přírůstkového vektoru \mathbf{h} se počítá obecně ze vztahu

$$\gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(x_i) - z(x_i + \mathbf{h})]^2 \quad (17)$$

kde $N(\mathbf{h})$ je počet dvojic bodů oddělených o vzdálenost h a orientovaných podle vektoru \mathbf{h} . Pro mřížkové uspořádání jsou možné pouze tři směry, a délka přírůstkového vektoru je násobkem velikosti elementární cely. Je tedy možné počítat směrový variogram ve směru podélném 0° ($\mathbf{h} = c*[1,0]$), diagonálním 45° ($\mathbf{h} = c*[1,1]$), a příčným 90° ($\mathbf{h} = c*[0,1]$) pro násobky $c = 1,2,3,\dots$. Průměrování variogramů ve všech směrech vede k tzv. všesměrovému variogramu (*omnidirectional variogram*) [4].

Pro výpočet standardizované kovariance s ohledem na přírůstkový vektor \mathbf{h} se používá vztah

$$C(\mathbf{h}) = \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} z(\mathbf{x}_i) * z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h}) - m_1 * m_h \quad (18)$$

Pro případ, kdy jsou data tvořena sekvencí hodnot $z(i,j)$ určených na pravoúhlé síti, kde i,j ($i = 1\dots m, j = 1\dots n$) definuje i,j -tou celou, se kovariance odhaduje dle vztahu

$$c(K,L) = \frac{1}{(m-K)(n-L)-1} \sum_{i=1}^{m-K} \sum_{j=1}^{n-L} (z(i+K, j+L) - z_p)(z(i, j) - z_p) \quad (19)$$

kde

$$z_p = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n z(i, j) \quad (20)$$

Pro výpočty související s variogramem a kovariancí. byly vytvořeny procedury v jazyku MATLAB 5.3. Pro odhad parametrů sférického modelu je použito lineární metody nejmenších čtverců.

4. Výběrové indexy prostorové autokorelace

Všechny indexy prostorové autokorelace lze vyjádřit jako součin matice prostorové blízkosti C a prostorové souvislosti W [6].

Prostorová „blížkost“ (proximita) mezi hodnotami proměnné z se pro kardinální data definuje pomocí matice C s prvky C_{ij} vyjadřujícími různé typy vzdáleností mezi z_i a z_j . Přirozená je volba

$$C_{ij} = (z_i - z_j)^2 \quad (21)$$

Standardně lze také s využitím průměru $z_p = \frac{1}{N} \sum z_i$ definovat C_{ij} ve tvaru

$$C_{ij} = (z_i - z_p) * (z_j - z_p) \quad (22)$$

Mezi další možnosti patří Mahalanobisova vzdálenost analogie korelace, Manhatanská vzdálenost, Lp norma atd.

Prostorová souvislost mezi místy se vyjadřuje pomocí prostorové váhové matice W s prvky W_{ij} . Obecně prvek W_{ij} vyjadřuje souvislost mezi lokalitou x_i a x_j . Prostorová souvislost se často chápe lokálně a váhová matice má prvek $W_{ij} = 1$, pokud se x_i a x_j považují za blízké sousedy resp. $W_{ij} = 0$ když jde o vzdálené polohy.

Pro regulární síť se lokální prostorová souvislost často definuje podle možností pohybu figur na šachovnici [9]. Při strategii **věže (rook)** existují pro každou x_i čtyři sousedi (dva v jednom a dva v druhém směru sítě kolmo na sebe). Při strategii **střelce (bishop)** existují pro každou x_i čtyři sousedi (dva v jednom a dva v druhém směru diagonálně vzhledem k orientaci sítě). Při strategii **krále (king)** existuje pro každou x_i šest sousedů jako kombinace předchozích dvou strategií. Schematicky lze tyto typy prostorové souvislosti vyjádřit pomocí obr 1. Zde symbol O definuje lokalitu a symboly XXX nejbližší sousedy pro které jsou váhy W jednotkové.

Rook			Bishop				King			
	XXXX			XXXX		XXXX		XXXX	XXXX	XXXX
XXXX	O	XXXX			O			XXXX	O	XXXX
	XXXX			XXXX		XXXX		XXXX	XXXX	XXXX

Obr 1. Strategie výběru nejbližšího souseda

Pro obecně neregulární uspořádání se běžně volí globální prostorová souvislost úměrná např. reciproké hodnotě vzdálenosti. Často se také provádí standardizace vah, tak aby součet všech prvků matice W byl roven jedné. Je zřejmé, že $W_{ii}=0$ a proto se často definitoricky zavádí i $C_{ii}=0$.

Všechny míry lokální autokorelace využívají definice smíšeného momentu G , pro který platí [7]

$$G = \sum_i \sum_j W_{ij} * C_{ij} \quad (23)$$

Tento moment se často označuje jako lineární model prostorové autokorelace. Statistické chování G se obvykle sleduje na základě znáhodnění tj. simulací, kdy se počítá G pro všechny permutace sloupců a řádků matic W a C .

Různé indexy a míry autokorelace jsou standardizované varianty statistiky G . Známý Moranův index má tvar

$$I = \frac{N}{\sum_i \sum_j W_{ij}} * \frac{\sum_i \sum_j W_{ij} * (z_i - z_p) * (z_j - z_p)}{\sum_i (z_i - z_p)^2} \quad (24)$$

Je zřejmé, že index I může být nulový jen pro případ, kdy $(z_i - z_p) * (z_j - z_p) = 0$.

Negativní prostorová autokorelace je pro $I > -1/(N-1)$ a pozitivní prostorová autokorelace je pro $I < -1/(N-1)$. Významnost indexu I se dá posuzovat na základě předpokladu přibližné normality nebo znáhodnění. V obou případech platí, že střední hodnota je rovna $E(I) = -1/(N-1)$. Pro rozptyl za předpokladu normality vyjde

$$D(I) = \left[\frac{1}{S_0^2 * (2N - 1)} (N^2 * S_1 - N * S_2 + 3 * S_0^2) \right] - E(I)^2 \quad (25)$$

Je použito označení $S_0 = \sum_i \sum_j W_{ij}$, $S_1 = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (W_{ij} + W_{ji})^2$ a $S_2 = \sum_i (W_{i*} + W_{*i})^2$. Zde W_{i*} označuje i-tý řádek a W_{*i} označuje i-tý sloupec matice W . Pro symetrické matice W je $S_2 = 2 * S_1$. Standardizovaná náhodná veličina

$$z = \frac{I - E(I)}{\sqrt{D(I)}} \quad (26)$$

má pak přibližně normované normální rozdělení takže lze snadno testovat významnost Moranova indexu I .

Druhým známým indexem autokorelace je Gearyho c , pro které platí, že má tvar

$$c = \frac{N - 1}{2 * \sum_i \sum_j W_{ij}} * \frac{\sum_i \sum_j W_{ij} * (z_i - z_j)^2}{\sum_i (z_i - z_p)^2} \quad (27)$$

Tento index se pohybuje v rozmezí 0 až 2. Negativní prostorová autokorelace je pro $c > 1$ a pozitivní prostorová autokorelace je pro $c < 1$. Střední hodnota je rovna 1 a pro rozptyl za předpokladu přibližné normality vychází

$$D(c) = \left[\frac{1}{S_0^2 * 2 * (N + 1)} ((N - 1) * (2 * S_1 + S_2) - 4 * S_0^2) \right] \quad (28)$$

Další postup testování významnosti je stejný jako u Moranova indexu. Existuje celá řada zobecnění prostorové autokorelace. Mezi jednoduché patří např. tzv. čtyřbodové statistiky $q(i, j, k, l)$ protože ke dvěma lokalitám x_i a x_j jsou k dispozici prvky W_{ij} , W_{ji} , C_{ij} , W_{ji} které nemusí být nutně stejné. Praktické možnosti použití čtyřbodové statistiky demonstruje práce [7]. Poměrně jednoduše lze také zavést charakteristiky lokální autokorelace (viz [8]), kdy se při výpočtu momentů sumuje pouze přes jeden index. Analogicky jako statistiku G lze definovat i lokální Moranovy I_i a Gearyho c_i indexy. Podrobnosti obsahuje práce [8].

Pro výpočty indexů autokorelace a realizaci testů byly vytvořeny procedury v jazyku MATLAB 5.3.

5. Realizace výpočtů

Jak je patrné, zvyše uvedených vztahů jde ve většině případů o operace s poli dat. Je tedy možné využít jak klasického přístupu založeného na složkách těchto polí nebo maticově orientovaného přístupu využívajícího speciálních operací s poli v jazyce Matlab. Pro ilustraci ukažme klasický a maticově orientovaný výpočet variogramu $g(h)$ ve směru osy x pro posun h , jsou-li k dispozici hodnoty pole $z(i, j)$ na pravoúhlé síti, kde i, j ($i = 1 \dots r$, $j = 1 \dots s$) definuje i, j -tou celou.

Klasický postup vychází z převedení tohoto pole na vektor z se složkami z_i (spojením

jednotlivých řádků do jedné posloupnosti) a výpočet sumy $\sum_{i=1}^{r*s-h} (z_i - z_{i+h})^2$

Odpovídající úsek programu má tvar:

```
for i = 1:r
for j = 1:s
x(n*(i-1)+j) = z(i,j);
end
end
g=0;
for i = 1:r*s-h
g=g+(x(i)-x(i+h))^2;
end
```

S využitím operátoru `:` je možno definovat dvě pole posunutá o h a počítat součet čtverců odchylek hodnot posunutých o h přímo. Odpovídající úsek programu má tvar:

```
for i = 1:r
x1 = z(i,1:s-h); %data od prvního do h toho sloupce
xh = z(i,1+h:s); %data posunuta o h
g(i) = sum((x-xh) .^ 2);
end
g = sum(g)
```

Tedy pro variogram ve směru os (sloupců a řádků pole $z(i,j)$) se dá počítat velmi snadno. Pokud se však počítá variogram ve směru diagonály nelze jednoduše využít posunu sloupců a řádků. Také pro obecné uspořádání, kde polohy dat netvoří pravidelnou obdélníkovou síť bude nezbytné sestavení posloupnosti hodnot z_i dle zvoleného kritéria resp orientace vektoru \mathbf{h} a pak a počítat součet čtverců odchylek hodnot posunutých o délku h .

Také pro výpočet indexů prostorové autokorelace lze využít složkového nebo maticově orientovaného postupu. Výhodou maticového vyjádření je zde universalita (mění se jen složky matice \mathbf{C} a \mathbf{W}). VE složitějších případech konstrukce váhové matice \mathbf{W} lze pro nalezení nejbližších sousedů (ležících v zadané oblasti využít příkaz „*find*“.

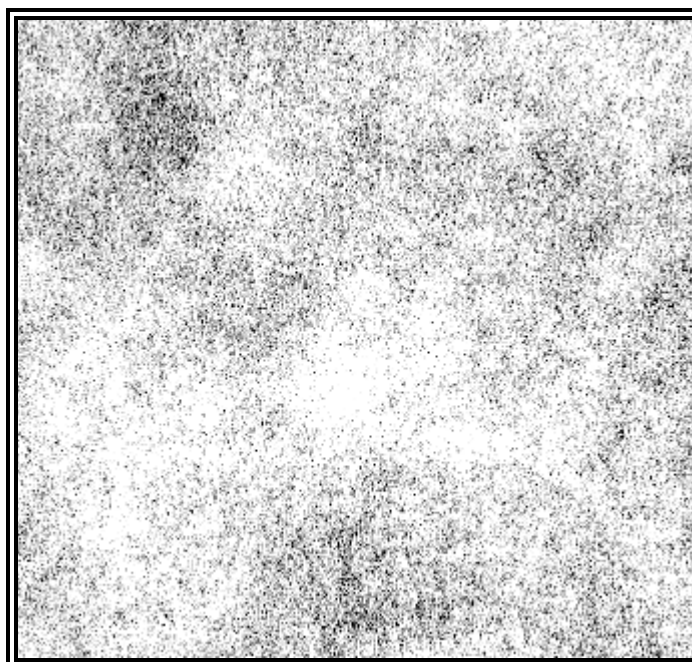
Při konstrukci parametrických modelů variogramu je třeba řešit úlohu lineární regrese, což je s využitím maticového vyjádření záležitost jednoho řádku.

Je tedy patrné, že s využitím možností jazyka Matlab lze vytvořit programy pro výpočet odhadů kovariance (**kovp.m**), variogramu (**vagr.m**) a indexů prostorové autokorelace (**paut.m**) relativně velmi snadno. Použití těchto programů je demonstrováno v na příkladu z oblasti hodnocení plošné hustoty.

6. Příklad

Technická aplikace chemicky pojené textilie obchodního názvu Perlan, například v elektrotechnickém průmyslu pro výrobu hydroizolačních pásek, je podmíněna zaručenou spolehlivostí v podélné pevnosti a tažnosti.

V upraveném stavu jsou u této netkané textilie požadovány zaručené hodnoty v elektrické průrazné pevnosti, nasákavosti a pevnosti v přetrhu. Všechny tyto vlastnosti souvisejí se stejnoměrností uspořádání vláknenných složek a pojiva Nestejnoměrnost vzhledu je dobře patrná z obr.2.



Obr. 2 Plošná stejnoměrnost vlákněné vrstvy v pojené textílii plošné hmotnosti 60 g m^{-2}

Účelem byl popis kolísání plošné hustoty této textílie. Plošná hustota $z(\mathbf{x})=z(x,y)$ v místě $\mathbf{x} = (x,y)$ je definována jako hmotnost $M(S)$ dělená plochou $S = \int dx dy$ elementárního čtverce tj. plochou příčného řezu objemového elementu o tloušťce odpovídající tloušťce textílie a příčných rozměrech $x \pm dx$ a $y \pm dy$. Formálně je

$$z(x,y) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{M(S)}{S} = t * \rho(x,y)$$

kde $\rho(x,y)$ je objemová hustota textílie v místě $\mathbf{x} = (x,y)$. Vzorky pro gravimetrická měření byly odebrány ve tvaru čtverců rozměrů $100 \times 100 \text{ mm}$. Tyto vorky byly rozděleny na rektangulární síť o velikosti cely $10 \times 10 \text{ mm}$. Pro textílii o plošné hmotnosti 60 g/m^2 má celá plošného obsahu $S_j = 100 \text{ mm}^2$ hmotnost kolem 6 mg . Kontrola přesnosti přípravy cel, byla provedena na náhodném výběru 25 vzorků.. Relativní chyba velikosti cely se pohybovala od 0.88% do 1.22% . Hmotnost každé cely m_{ij} byla určena jako průměr z pěti vážení. Maximální relativní chyba vážení u vzorku 60 g/m^2 byla 1.606% .

V tab. 1 jsou uvedeny hodnoty m_{ij} pro vzorek pojené textílie plošné hmotnosti 60 g m^{-2} [4].

Tabulka 1 Průměrné hmotnosti cel pojené textílie plošné hmotnosti 60 g m^{-2}

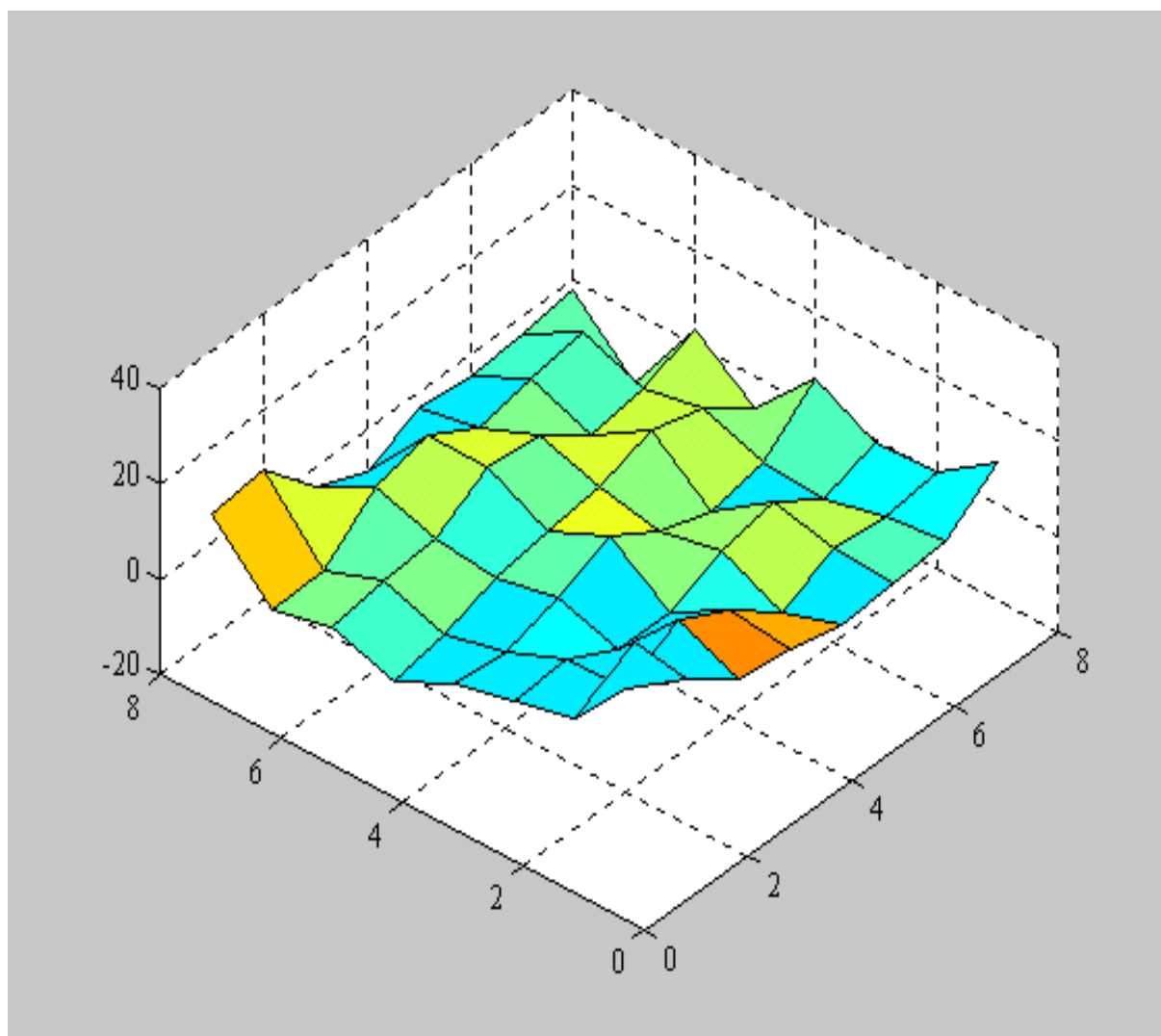
Průměrná hmotnost m_{ij} [10^{-4} g]									
60	60	55.7	56	57.8	53.8	67	62.7	69.2	63.2
58.1	68.8	68.1	66.1	66.1	54.9	52.1	51.8	64.2	65.3
61.1	63	53.4	60.1	60.4	56.1	56	57	55.7	55
51.1	51.9	53.8	55.4	56.1	51	57.1	54.8	55.4	61.4
55.5	57.1	53.1	56.8	59.7	57.2	61	51.6	55.8	57.1
54.8	51.2	60	59.1	53.1	54.6	61	62.7	61.6	52.1
52.4	58.2	59.2	53.1	62.2	63.4	63.2	54.8	54.8	58
59	63.9	58.1	58	67	56.3	61.8	65	58.1	53.5
70	63.4	71	64.3	51.3	56	59.5	58	51	62.2
69.3	73	65	57	57.2	63	56	62	61	60

Vzhledem k tomu, že byla použita stejná velikost cel o ploše $S_j = 100 \text{ mm}^2$ je plošná hustota $z_{ij} = m_{ij} / S_j$ v $[\text{g m}^{-2}]$ číselně rovna hodnotám v tab. 1. Základní statistické charakteristiky tohoto pole plošné hustoty jsou uvedeny v tab.2.

Tabulka 2. Základní statistické charakteristiky plošné hustoty

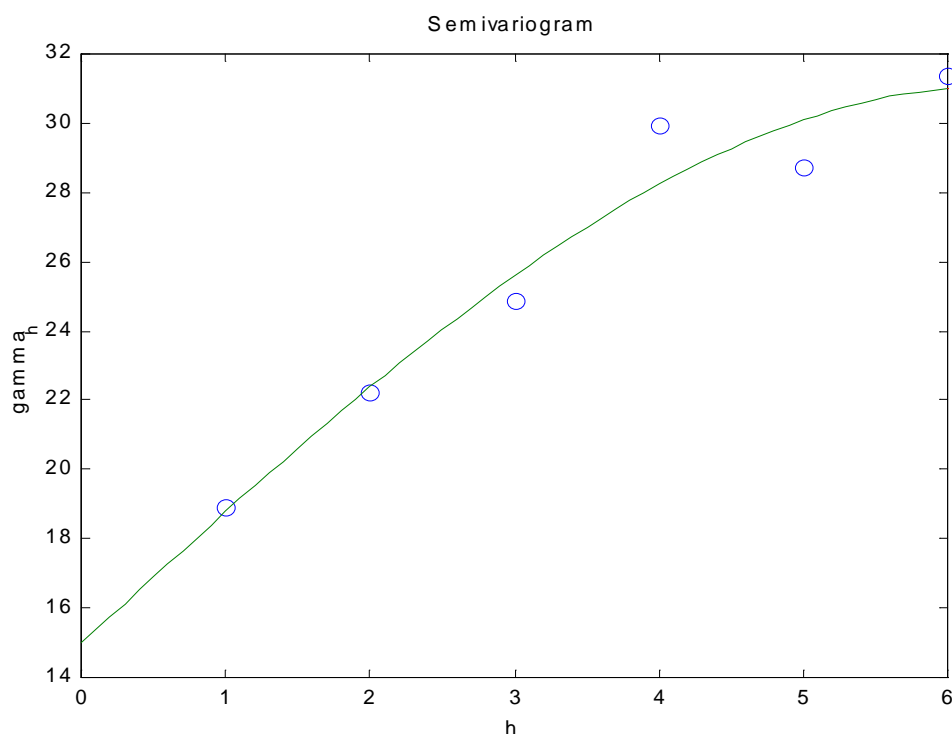
Počet hodnot	100	rozměr
Průměr	58.92	$[\text{g m}^{-2}]$
Maximální hodnota	73	$[\text{g m}^{-2}]$
Minimální hodnota	51	$[\text{g m}^{-2}]$
Směrodatná odchylka	5,12	$[\text{g m}^{-2}]$
Variační koeficient	8.68	$[\%]$

Na obr 3 je znázorněn odhad kovarianční funkce $c(K,L)$ pro $K=0,1,\dots,7$ a $L=0,1,\dots,7$. (grafický výstup programu **kovp.m.**).



Obr 3 Odhad kovarianční funkce $c(K,L)$

Všesměrový variogram je znázorněn na obr 4. (grafický výstup programu **vagr.m**)



Obr 4. Všesměrový variogram

Křivka znázorněná plnou čarou odpovídá sférickému modelu s parametry určenými metodou nejmenších čtverců.

Je patrná diskontinuita v počátku (nugget efekt). Vypočtené hodnoty všesměrového variogramu a kovariance jsou uvedeny v tab. 3 Rozptyl je zde roven $c(0,0) = 25.937$.

Tabulka 3. Všesměrové charakteristiky prostorové variability

Posun	Variogram	Covariance
1	20.1198	5.1710
2	21.1538	2.096
3	24.9066	-2.045
4	25.1356	-2.272
5	25.4189	-1.197
6	25.8043	-0.50
7	26.4319	1.180

Hodnoty všesměrového variogramu byly použity pro konstrukci sférického modelu definovaného rov (21). Byly nalezeny odhady $c0 = 14.78013$, $c = 10.99973$ a $a = 4.642217$. Indikativní ukazatel kvality proložení vyšel IGF: $1.8986e-03$ což spolu s grafem na obr 3 indikuje vhodnost sférického modelu (viz. [5]).

Je zřejmé, že nugget má poměrně vysokou hodnotu, což indikuje nesplnění předpokladu stacionarity druhého řádu. Tento přechodový typ modelu ukazuje na prostorovou závislost malého dosahu a náhodnost ve větším měřítku [6].

Pro vyjádření prostorové autokorelace bylo použito jak Moranova I tak i Gearyho c indexu. Vzhledem k regularitě sítě bylo použito lokální definice nejbližších sousedů podle obr 1. (program **paut.m**). Výsledky jsou uvedeny v tab. 4.

Tabulka 4. Indexy prostorové autokorelace

Typ souseda	I	D(I)	Z(I)	c	D(c)	Z(c)
Rook	0,255	0,0053	3,662	0,721	0,0057	3,677
Bishop	0,14	0,0059	1,952	0,819	0,0078	2,03
Queen	0,20	0,0027	4,06	0,768	0,0037	3,79

V tab. 4 jsou $Z(I)$ a $c(I)$ standardizované náhodné veličiny s přibližně normálním rozdělením. Jejich velikost (podstatně výše než 2) svědčí o výrazné pozitivní autokorelaci.

5. Závěr

Byly diskutovány základní nástroje pro hodnocení statistické variability náhodných polí. Speciálně variogram se hodí se při případy vyšších korelací mezi prvky pole. Pro regulární mřížky je možno použít směrového variogramu ve směru podélném, příčném a diagonálním nebo jejich kombinaci- všesměrový variogram. Parametrické modely umožňují vyjádření závislosti variogramu na velikosti a orientaci směrového vektoru. Indexy prostorové autokorelace mohou indikovat speciální typy závislostí s ohledem na zvolenou definici nejbližších sousedů. Programy pro vyjádření prostorové variability náhodných polí v jazyce MATLAB 5.3 jsou k dispozici u autora této práce.

Poděkování

Tato práce vznikla s podporou grantu GAČR č. 106/99/1184 a výzkumného záměru MŠMT J11/98:244101113

6. Literatura

- [1] Klička. V.: Disertační práce, 1998, Liberec
- [2] Militký J., Rubnerová J., Klička V.: Vzhledová nestejnomyernost netkaných textilií , Sborník z konference STRUTEX 98, Liberec 1998
- [3] Royle J.A.: Geophysical Statistics project, DMS 93-12686, Natl. Center for Atmospheric Research, Boulder 1993
- [4] Pannatier Y.: Variowin Software for Spatial Data Analysis, Springer New York 1996
- [5] Cressie N.A.C.: Statistics for Spatial Data, J. Wiley, New York 1993
- [6] Cliff A. D., Ord J.K.: Spatial autocorrelation, Pion, London 1973
- [7] Hubert L. J. a kol. Geographical Analysis **13**, 224 (1981).
- [8] Anselin L.: Geographical Analysis **27**, 93 (1995).
- [9] Sawada M.: Bull. Ecol. Soc. Amer. **80**, 231 (1999)

Prof. Ing. Jiří Militký CSc.

Katedra textilních materiálů

Textilní fakulta

Technická universita v Liberci

461 17 LIBEREC

jiri.militky@vslib.cz