

VYUŽITÍ MATLABU K POTLAČOVÁNÍ ADITIVNÍHO ŠUMU POMOCÍ FILTRACE A POMOCÍ VLNKOVÉ TRANSFORMACE

Gabriela Eisensteinová, Miloš Sedláček

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická, katedra měření

1 Úvod

Měřené signály jsou v praxi většinou směsí užitečného signálu a šumu. Ve většině případů je tento šum k užitečnému signálu přičten, čili jde o tzv. aditivní šum. Může jít o šum tepelný, generovaný v odporech, šum elektronických obvodů, kvantizační šum vznikající při digitalizaci signálu pomocí analogově-číslicových převodníků, nebo o rušivé signály indukované do měřicího obvodu elektromagnetickou nebo elektrostatickou vazbou.

Šum je v obecném případě stochastický signál a jako takový je popsán jednak v amplitudové oblasti - rozložením amplitud (hustotou pravděpodobnosti nebo distribuční funkcí), jednak v oblasti časové (autokorelační funkcí) nebo frekvenční (výkonovou spektrální hustotou). Popisy v časové a frekvenční oblasti jsou ekvivalentní, protože autokorelační funkce a výkonová spektrální hustota jsou spolu vázány Fourierovou transformací (tzv. Wienerovy-Chinčiny vztahy). Je-li výkonová spektrální hustota šumu konstantní, jde o tzv. bílý šum. Ten může mít amplitudy rozložené různými způsoby. Nejběžněji se v odvozeních a experimentech používá bílý šum s normálním rozložením, který lze nejnadhěji matematicky zpracovávat. Důležitý je také bílý šum s rovnoměrným rozložením amplitud, který (za v praxi často splněných předpokladů, zejména nekorelovanosti šumu se signálem) aproximuje kvantizační šum ideálního kvantovače (analogově-číslicového převodníku).

Pro zmenšení nejistoty měření je nutno šum co nejvíce potlačit, čili zvýšit poměr signálu k šumu (SNR – z angl. „*signal to noise ratio*“) často vyjadřovaný v dB. SNR je určován z poměru výkonů nebo z poměru efektivních hodnot známými vztahy (1) a (2)

$$\text{SNR} = 10 \cdot \log(P_s/P_n) \quad (\text{dB}) \quad (1)$$

$$\text{SNR} = 20 \cdot \log(U_s/U_n) \quad (\text{dB}), \quad (2)$$

kde index „s“ označuje signál a index „n“ označuje šum (z angl. *noise*).

V příspěvku porovnááme tři metody potlačování šumu (zvyšování SNR) [1], které aplikujeme na tři typy periodických signálů. Pro simulaci těchto metod využíváme prostředí MATLAB [2] a jeho dva toolboxy [3], [4].

Metoda frekvenční filtrace spočívá v úpravě signálu smíchaného se šumem vhodným frekvenčně selektivním filtrem (dolní propust, pásmová propust, horní propust, pásmová zádrž), který má co nejvíce potlačit šum a co nejméně ovlivnit signál. Tato metoda je vhodná tam, kde se frekvenční spektra signálu a šumu nepřekrývají. Zvláště výhodná je pro harmonický (sinusový) signál.

Metoda sumačního průměrování (sumační filtrace) spočívá v opakovaném měření směsi signálu se šumem pro skupinu bodů rozložených stejně vzhledem k počátku jednotlivých period. Vypočtením aritmetického průměru pro každý z těchto bodů snížíme (v ideálním případě eliminujeme) šum, ale hodnota signálu zůstane nezměněna.

Metoda potlačování šumu (angl. *signal denoising*) *používající vlnkové (waveletové) transformace* spočívá ve výpočtu přímé vlnkové transformace, prahování koeficientů této transformace (čili zanedbání koeficientů s hodnotami pod zvoleným prahem) a provedení zpětné transformace. Tímto způsobem je možno zvyšovat SNR i v případech, kdy se

frekvenční spektra signálu a šumu překrývají, přičemž skokové změny signálu nejsou výrazně zpomaleny.

Princip prvních dvou metod je dostatečně zřejmý, o vlnkové transformaci se stručně zmíníme v následujícím odstavci.

2 Vlnková transformace [4]

Podnětem pro vznik vlnkové transformace byla snaha získat časově – frekvenční popis signálu. Fourierova transformace poskytuje informaci o frekvenčních složkách signálu, ale nevypovídá o jejich poloze v čase. Vlnková transformace získání takového popisu umožňuje. Jak ale ukazuje tento příspěvek, použití této transformace je podstatně širší.

Spojité vlnkové transformace (CWT – continuous wavelet transform) je definována pro signály s konečnou energií takto:

$$C(s, p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi(s, p, t)dt \quad (3)$$

kde $f(t)$ je analyzovaný signál, $\psi(s, p, t)$ vlnková funkce, s měřítko (scale), p poloha umístění vlnky na časové ose (pozice, posuv), a t je čas. Výsledkem vlnkové transformace je soubor koeficientů C , které představují míru korelace použité mateřské funkce a příslušné části signálu.

Translace a změna měřítka pro jednorozměrný případ je dána vztahem

$$\psi(s, p, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \psi\left(\frac{t-p}{s}\right) \quad (4)$$

kde $s, p \in R, s \neq 0$. ψ je tzv. mateřská vlnka a člen $\frac{1}{\sqrt{s}}$ slouží k normalizaci energie vlnky při změnách měřítka. Pro ψ musí platit:

$$\int \psi(x)dx = 0 \quad (5)$$

Vlnková funkce ψ má charakter pásmové propusti a určuje detaily signálu. Od ní je odvozena tzv. měřítková funkce (scaling function) ϕ , která se chová jako dolní propust, a pomocí ní se získává aproximace signálu. Funkce ϕ musí splňovat podmínku:

$$\int \phi(x)dx = 1 \quad (6)$$

Malá hodnota měřítka s odpovídá rychle se měnícím detailům a tedy vyšším frekvencím, a naopak velká hodnota nízkým frekvencím.

Vlastnosti CWT:

1) linearita

$$W[(af_1 + bf_2)](s, p) = a \cdot W[f_1](s, p) + b \cdot W[f_2](s, p) \quad (7)$$

2) invariance v čase

$$W[f_2](s, p) = W[f_1](s, p - b), \quad f_2(t + b) = f_1(t) \quad (8)$$

3) dilatace

$$W[f_2](s, p) = W[f_1]\left(\frac{s}{a}, ap\right), \quad f_2 = \sqrt{|a|} \cdot f_1(at), \quad a \neq 0 \quad (9)$$

V diskrétní vlnkové transformaci DWT (discrete wavelet transform) probíhají parametry časově – prostorového měřítka po dvojkové mřížce:

$$C(s, p) = \sum_{n \in Z} f(n) \cdot \psi_{j,k}(n), \quad s = 2^j, p = k \cdot 2^j, j \in N, k \in Z \quad (10)$$

kde

$$\psi_{j,k}(n) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \cdot \psi\left(\frac{n - k \cdot 2^j}{2^j}\right) \quad (11)$$

Algoritmus potlačování šumu pomocí vlnkové transformace spočívá v dekompozici signálu na aproximace a details, v úpravě získaných koeficientů - tzv. prahování (thresholding), a ve zpětné rekonstrukci signálu IDWT (inverse discrete wavelet transform) z upravených koeficientů. K rozkladu slouží dvojice dekompozičních filtrů s komplementárními propustnými pásmy, které jsou odvozeny od vlnkové funkce ψ . Aby celkový počet koeficientů zůstal nezměněn, následuje po filtraci podvzorkování s faktorem 2. Podobně před rekonstrukcí se počet vzorků zvyšuje na dvojnásobek proložením nulami a rekonstrukce se provádí další dvojicí filtrů. Čtveřici filtrů se říká kvadraturní zrcadlové filtry a jejich tvar je přesně dán typem waveletu.

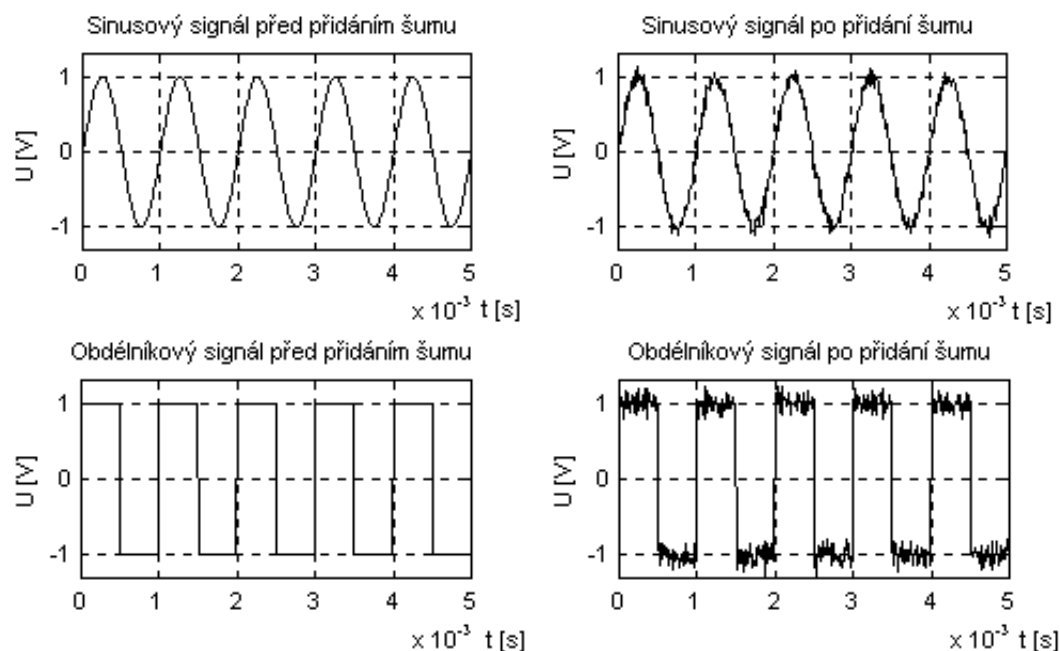
3 Zkoumané signály a použité filtry a wavelety

3.1 Zkoumané signály

Porovnání jednotlivých metod potlačování šumu jsme prováděli na dvou základních typech periodických signálů s přidaným bílým šumem s normálním rozložením, nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem. Amplituda šumu byla upravena tak, aby všechny signály měly na počátku stejný poměr signálu k šumu, a sice $\text{SNR} = 20\text{dB}$. Časové průběhy těchto signálů uvádí obr. 1.

Parametry signálů byly stejné pro simulace všech tří metod zvyšování SNR:

- frekvence signálu: $f = 1\text{kHz}$
- vzorkovací frekvence: $f_{vz} = 100\text{kHz}$
- amplituda: $U = 1\text{V}$
- poměr signálu k šumu: $\text{SNR} = 20\text{dB}$



Obr. 1 – Vygenerované signály – ideální a zašuměné

3.2 Použité typy waveletů

Pro vlnkovou transformaci byly na základě předchozích experimentů vybrány wavelety, které jsou uvedeny společně s použitými úrovněmi rozkladu v tabulkách 1 a 2. K odstranění šumu byla užita funkce `wden`, která volbou parametrů umožňuje výběr z několika metod pro automatické nastavování prahu. Tyto parametry jsou popsány v [4]. Vždy jsme používali tzv. měkké prahování (soft thresholding), které je tento účel vhodnější, než prahování tvrdé (hard thresholding).

3.3 Použité filtry

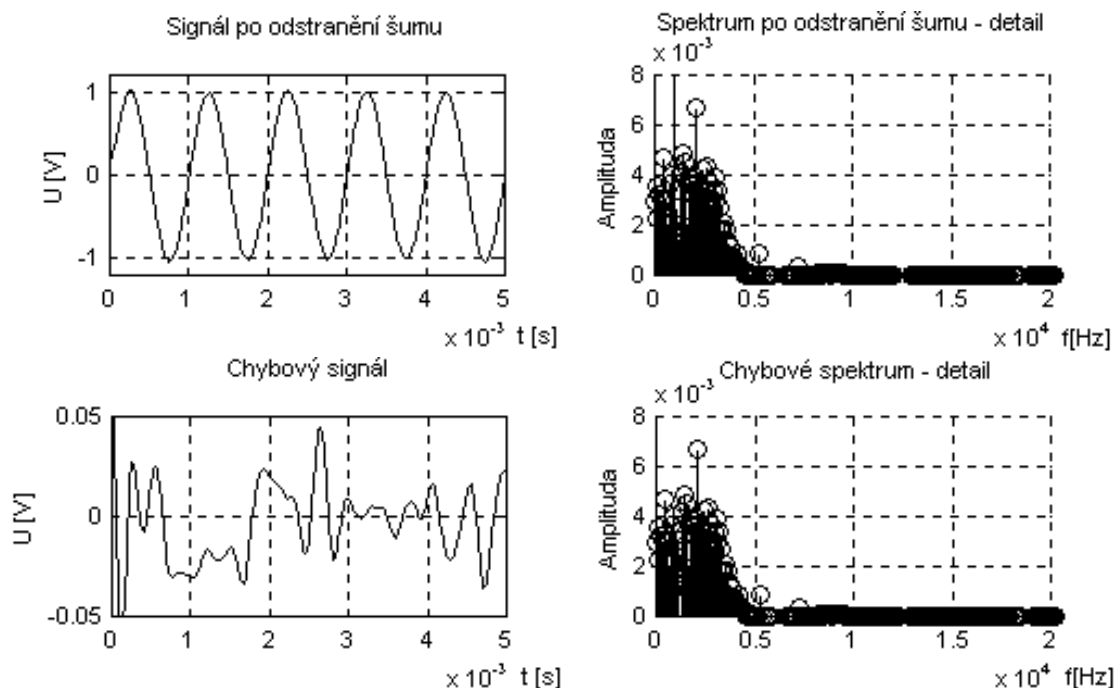
Pro simulace jsme použili následující typy filtrů:

- dolní propust FIR: `fir1`, mezní frekvence propustného pásma $f_p = 1,2$ kHz pro sinusový signál a 5 kHz pro obdélníkový signál, řád filtru $N = 12$
- dolní propust IIR: `cheby1`, zvlnění v prop. pásmu 0,1 dB, řád filtru $N = 3$, mezní frekvence propustného pásma $f_p = 1,2$ kHz
- pásmová propust FIR: `remez`, mezní frekvence propustného pásma $f_{p1} = 0,8$ kHz, $f_{p2} = 1,2$ kHz, mezní frekvence zádržného pásma $f_{s1} = 0,2$ kHz, $f_{s2} = 1,8$ kHz, řád filtru $N = 402$ (zvlnění v prop. pásmu 0,1 dB);

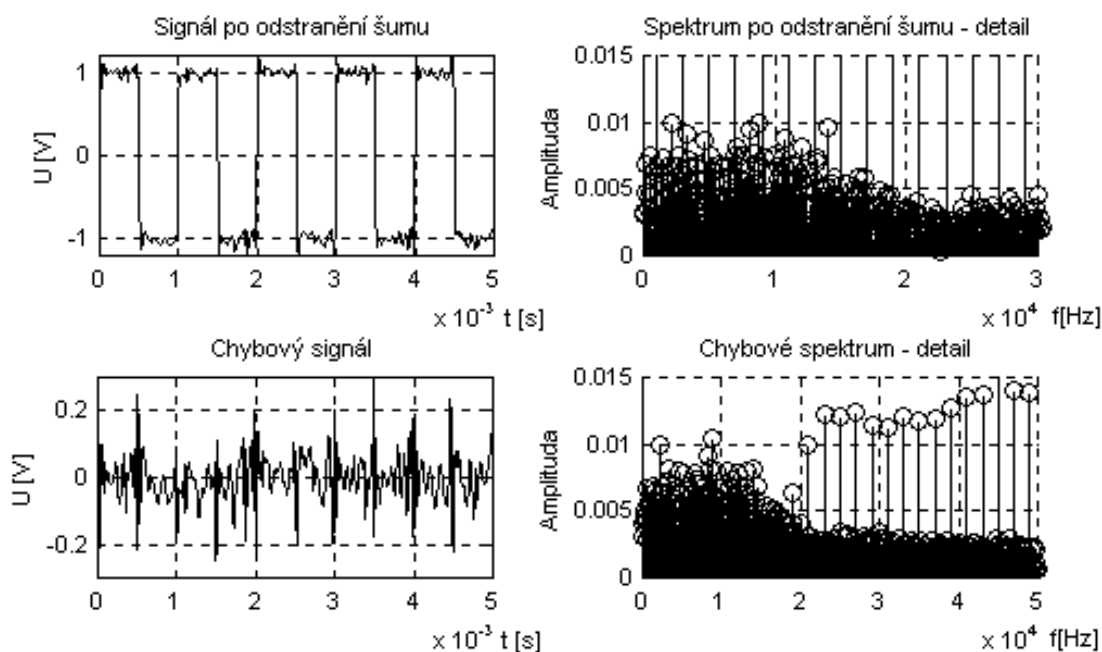
4 Výsledky simulace

Dále uvedeme příklady výsledků pro jednotlivé metody. Chybový signál definujeme jako rozdíl signálu po potlačení šumu a původního nezašuměného signálu. Chybový signál je tedy měřítkem účinnosti použité metody pro daný vstupní signál. Číselnou charakteristikou účinnosti metody je hodnota SNR po aplikaci metody (resp. rozdíl SNR po proceduře a SNR zašuměného vstupního signálu (to je 20 dB)). Z průběhu spektra zašuměného signálu (které zde neuvádíme) je zřejmý přibližně bílý charakter použitého šumu.

4.1 Příklady výsledků získaných pomocí waveletů

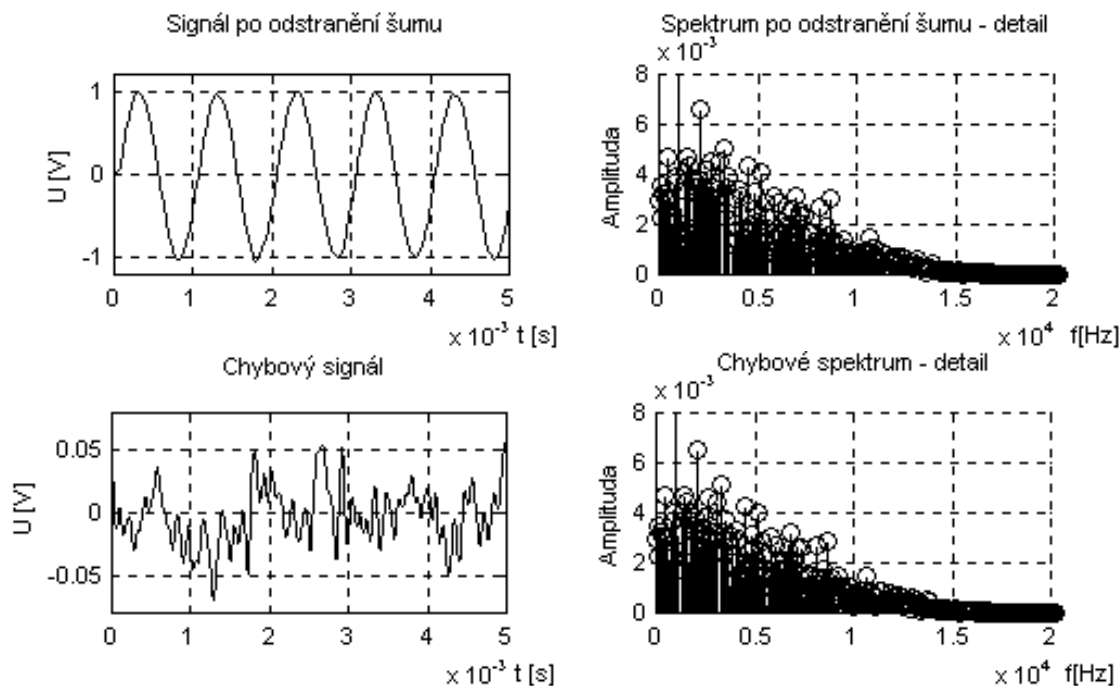


Obr. 2 – Sinusový signál, odstranění šumu pomocí waveletu typu `sym 8`, úroveň rozkladu 4

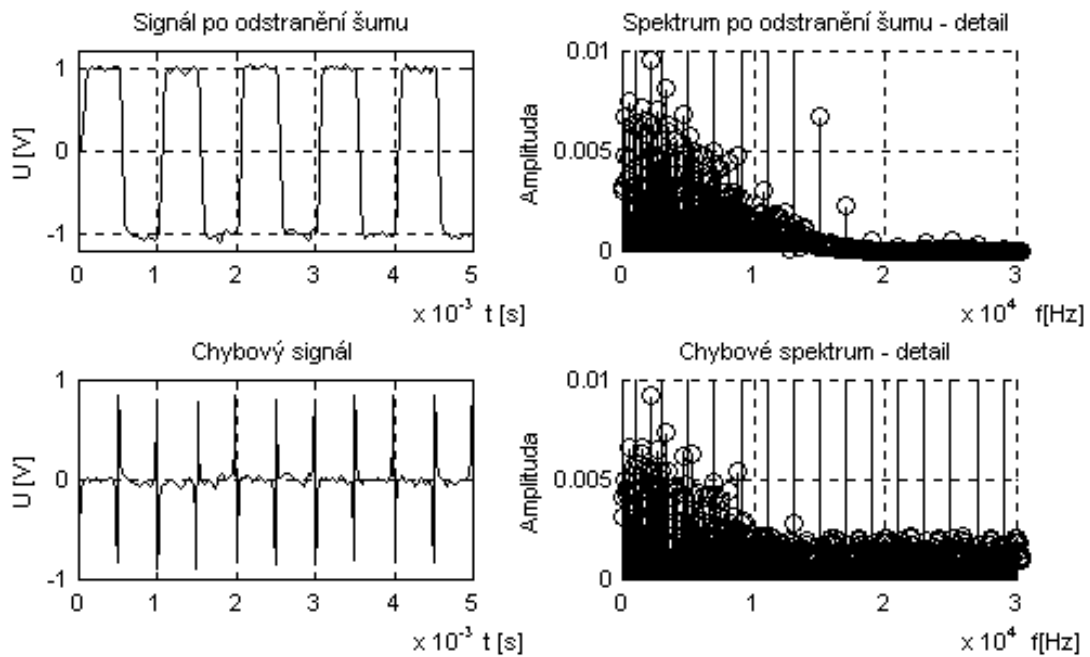


Obr. 3 – Obdélníkový signál, odstranění šumu pomocí waveletu typu bior 3.5 úroveň rozkladu 2

4.2 Příklady výsledků získaných pomocí filtrací číslicovými filtry

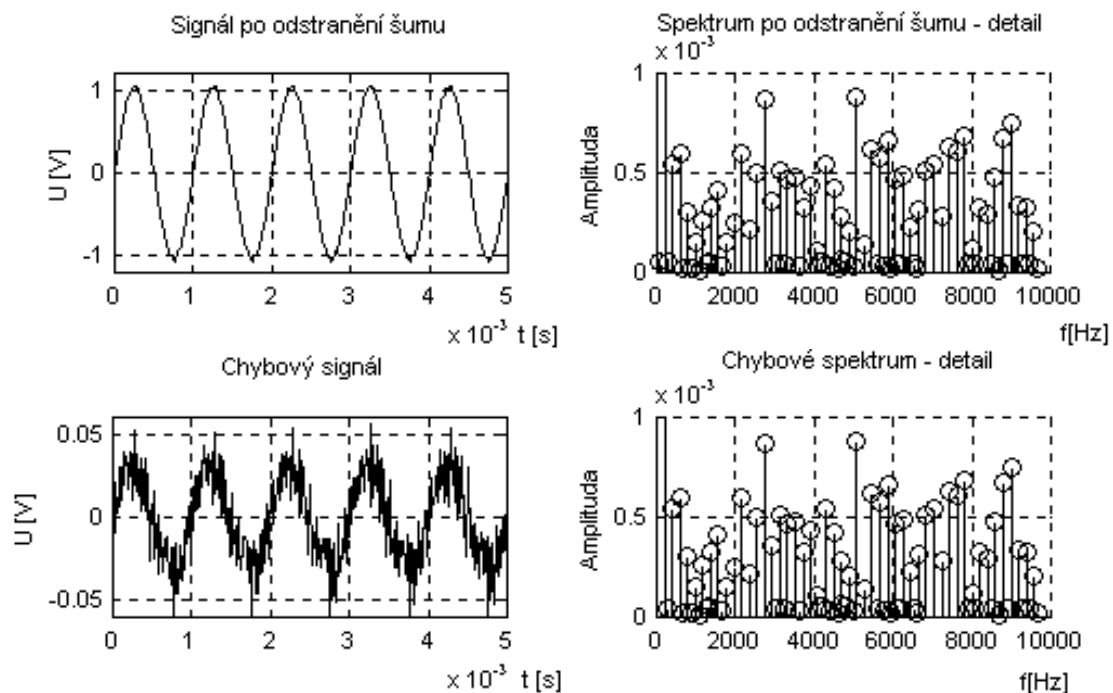


Obr. 4 – Sinusový signál po filtraci dolní propustí typu FIR dolní propust

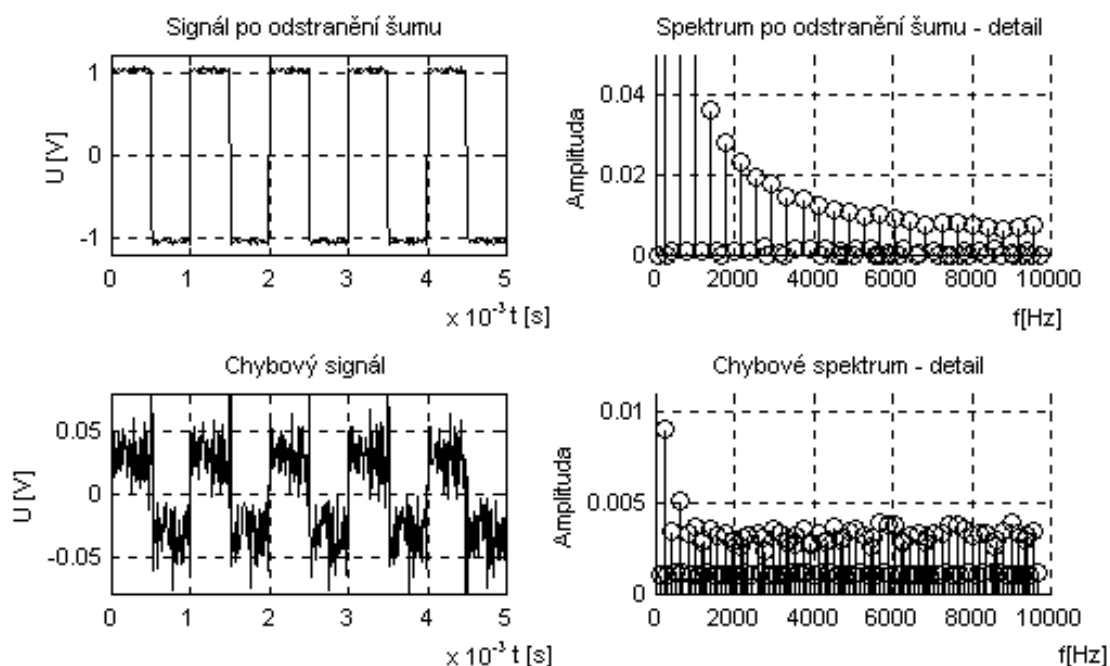


Obr. 5 - Obdélníkový signál po filtraci dolní propustí typu FIR dolní propust

4.3 Výsledky získané sumačním průměrováním



Obr. 6 – Sinusový signál – odstranění šumu sumačním průměrováním ze 32 period



Obr. 7 - Obdélníkový signál – odstranění šumu sumačním průměrováním ze 32 period

Tabulka 1 – Porovnání účinnosti jednotlivých metod pro sinusový signál

4.3.1 Vlnková transformace					
typ waveletu	dmey	sym8	bior 5.5	bior 6.8	coif 3
úroveň rozkladu	5	4	7	6	4
metoda prahování	sqtwolog sln	sqtwolog one	heursure sln	heursure sln	sqtwolog one
SNR [dB]	49.67	36.40	33.16	31.96	31.88
4.3.2 Filtrace					
typ filtru	FIR dolní propust		IIR dolní propust	FIR pásmová propust	
SNR [dB]	30.78		32.12	22.68	
4.3.3 Sumační průměrování					
počet period	4	8	16	32	
SNR [dB]	30.31	35.02	40.98	51.71	

Tabulka 2 – Porovnání účinnosti použitých metod pro obdélníkový signál

4.3.4 Vlnková transformace					
typ waveletu	bior 3.5	dmey	coif 3	coif 2	bior 2.8
úroveň rozkladu	2	2	2	2	4
metoda prahování	heursure mln	rigrsure mln	heursure sln	heursure sln	heursure sln
SNR [dB]	22.56	22.50	22.16	22.35	22.07
4.3.5 Filtrace					
typ filtru	FIR dolní propust		IIR dolní propust	FIR pásmová propust	
SNR [dB]	26.81		28.33	22.46	
4.3.6 Sumační průměrování					
počet period	4	8	16	32	
SNR [dB]	24.84	29.51	34.96	40.69	

5 Závěr

Kritériem pro porovnání účinnosti jednotlivých metod je především zvýšení poměru signálu k šumu. Hodnoty SNR uvedené v tab.1 a tab.2 jsou hodnotami po aplikaci příslušné metody, SNR vstupního signálu je 20 dB.

Hodnoty SNR jsme určovali z průběhu autokorelačních funkcí [1]. Výkon signálu se šumem odpovídá hodnota autokorelační funkce v počátku. Výkon signálu jsme počítali jako průměr z pěti periodických maxim autokorelační funkce, protože se ukázalo, že výkon signálu po filtraci se liší od výkonu původního signálu před přidáním šumu. Kromě hodnoty SNR je třeba posuzovat deformování signálu použitou metodou. Deformace je zřejmá v časové i frekvenční oblasti. Z tohoto důvodu je nutno u filtrů typu DP a PP volit mezní frekvence pro filtraci periodických nesinusových signálů tak, aby zůstaly ve spektru některé vyšší harmonické složky a proto nedošlo k nepřijatelné deformaci signálu (např. obdélník, viz obr.5). Tím se ovšem snižuje (v případě bílého šumu) dosažitelná hodnota SNR.

Vhodnou volbou parametrů rozkladu a prahování lze u obdélníkového signálu použitím vlnkové transformace docílit vyššího potlačení šumu bez výrazného poškození spektra, jak k tomu dochází při klasické filtraci číslicovými filtry typu dolní nebo pásmová propust při nevhodné volbě mezní frekvence filtru. Změna úrovně rozkladu u vlnkové transformace je do určité míry ekvivalentní změně mezní frekvence ekvivalentního filtru. Jako u jiných aplikací vlnkové transformace, i zde je třeba pro konkrétní typ signálu vybrat typ waveletu a úroveň rozkladu na základě řady experimentů.

Z výsledků simulací vyplývá, že pro zvýšení hodnoty SNR je ze zkoumaných tří metod nejúčinnější metoda sumačního průměrování. Její účinnost roste s rostoucím počtem průměrovaných period signálu. Její použitelnost v praxi navíc vyžaduje možnost synchronizace vzorkování s (nezašuměným) signálem. Pokud je k dispozici pouze signál prakticky utopený v šumu, nelze tuto metodu (na rozdíl od druhých dvou) samostatně použít. Je jí ale v určitých případech možno aplikovat po předběžném zvýšení SNR frekvenční filtrací.

Účinnost potlačení šumu vlnkovou transformací závisí na typu waveletu a úrovni rozkladu. Výhodou této metody ve srovnání s filtrací filtry typu DP a PP je, že nedochází k podstatnějšímu prodloužení naběžných a sestupných hran signálu.

Poděkování

Příspěvek byl zpracován v rámci výzkumného záměru číslo J04/98:210000015 na ČVUT v Praze, podporovaného Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy České republiky.

..

Literatura

- [1] M. Sedláček: Zpracování signálů v měřicí technice. Vydavatelství ČVUT, Praha 1999 (druhé vydání)
- [2] MATLAB The Language of Technical Computing, Using MATLAB, Version 5, MathWorks, Inc., Natick, MA, USA, 1998
- [3] Signal Processing Toolbox For Use with MATLAB, User's Guide, MathWorks, Inc., Natick, MA, USA, 1998
- [4] Wavelet Toolbox For Use with MATLAB, User's Guide, MathWorks, Inc., Natick, MA, USA, 1996

Kontaktní adresa: Doc. Ing. Miloš Sedláček, CSc.

České vysoké učení technické v Praze, Fakulta elektrotechnická, katedra měření,

Technická 2, 166 27 Praha 6. Tel: (+420 2)2435 2177, fax: (+420 2) 311 9929

E-mail: sedlaceM@feld.cvut.cz