

# NÁVRH $l_1$ -OPTIMÁLNÍHO REGULÁTORU<sup>1</sup>

Zdeněk Hurák, Michael Šebek

Centrum aplikované kybernetiky  
České vysoké učení technické, Praha, ČR

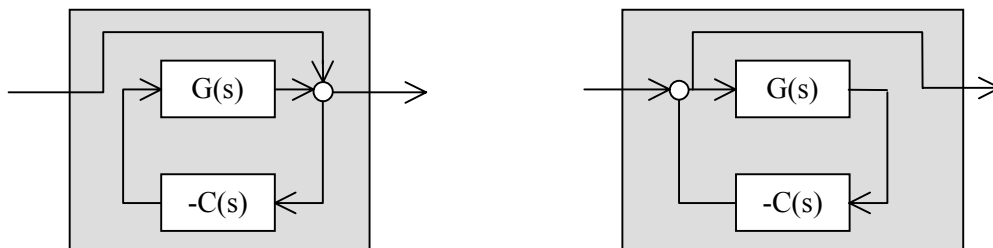
e-mail: z.hurak@c-a-k.cz, m.sebek@c-a-k.cz

**Abstrakt:** představení skupiny metod pro návrh lineárních optimálních regulátorů. Regulátory minimalizují  $l_1$  normu impulsní charakteristiky uzavřené zpětnovazební smyčky a minimalizují tak špičky ve výstupním (regulovaném) signálu. Jediným předpokladem na vstupní (poruchové) signály je přítom jejich omezenost. Metody jsou implementovány v Matlabu a využívají algoritmů implementovaných v Polynomiálním toolboxu a Optimalizačním toolboxu.

**Klíčová slova:**  $l_1$ -optimální řízení, lineární programování, zpětnovazební řízení.

## I. ÚVOD DO $l_1$ -OPTIMÁLNÍHO ŘÍZENÍ

Moderní teorie řízení se snaží formulovat úlohu návrhu zpětnovazebního regulátoru jako optimalizační úlohu, ve které je cílem minimalizovat *schopnost systému zesilovat* vstupní signály. Typickou je úlohou problém potlačení účinku poruchových signálů (disturbance rejection). Ve stejném formátu lze ale zadat i úlohu sledování referenčního signálu (reference following). Vstupem do systému je referenční signál, výstupem je chyba sledování. Tyto dva případy jsou znázorněny na obr. 1.



**Obr. 1.** – a) úloha potlačení poruchy a b) úloha sledování referencie ve standardní konfiguraci

Výše uvedené případy jsou ale jen speciálními instancemi obecnějšího schéma, kdy všechny signály ovlivňující jakýmkoliv systémem chování systému jsou označeny jako vstupní a požadované chování systému je popsáno sadou výstupních signálů, u kterých je žádoucí, aby byly *co nejmenší*. Například odchylka sledování, ale také i samotný řídicí signál.

<sup>1</sup> Tato práce byla podpořena Ministerstvem školství a tělovýchovy ČR v rámci projektu LN00B096.

Exaktně založenému čtenáři teď možná začnou vadit vágní termíny z předchozího odstavce: "zesiluje co nejméně" či "signály co nejmenší". Bez přílišného zabíhání do matematiky bude snad dostačující následující vysvětlení. Na dynamický systém se díváme jako na operátor (funkci, zobrazení, transformaci) z jednoho vektorového prostoru signálů (funkcí či posloupností) do druhého. V tomto textu se přitom omezíme na lineární časově invariantní diskrétní systémy. Matematickou abstrakcí takových systémů jsou lineární operátory, které samy o sobě tvoří normovaný vektorový prostor, jinými slovy, umíme *změřit*, jak daný systém působí na vstupní signály určitého typu. Dnes již dospělé návrhové metody minimalizující  $H_\infty$  normu systému například předpokládají, že vstupní signály mají omezenou energii. Žádné jiné omezení či upřesnění typu vstupních signálů. Navržený optimální regulátor garantuje, že systém bude co nejméně zesilovat energii těchto vstupních signálů.

Pro mnoho aplikací je ale mnohem realističtější předpokládat, že signály do systému vstupující přetrvávají (na rozdíl od  $H_\infty$  přístupu, který implicitně předpokládá, že signály jednou dostatečně *zestárnou*) a mají omezenou amplitudu. Ze stejné třídy signálů jsou i signály systémem produkované. Žádoucí pak je navrhnout regulátor, který za uvedených předpokladů minimalizuje špičky ve výstupních signálech. Takový regulátor je označován jako  $L_1$ - či  $l_1$ -optimální regulátor (spojitý či diskrétní případ). Důvodem pro takové označení je, že regulátor minimalizuje  $L_1$  či  $l_1$  normu impulsní charakteristiky uzavřené smyčky. Velkou oblastí využití  $l_1$  regulace je řízení vodních toků a zavlažovacích kanálů [2].



Praktickou kuchařkou pro návrh  $l_1$ -optimálních regulátorů je dnes již klasická monografie [1]. Celá teorie silně využívá metod matematického programování, především pak lineárního programování.

V následující části příspěvku bude  $l_1$ -optimální regulátor porovnán na jednoduchém příkladu s jinými způsoby regulace. Pro praktický výpočet byly využity funkce matlabských knihoven *Optimization Toolbox for Matlab™* a *Polynomial Toolbox for Matlab™* [3]. Vyvinuté nástroje budou zahrnuty v některé z příštích verzí Polynomiálního toolboxu.

## II. PRAKTICKÝ NÁVRH $l_1$ -OPTIMÁLNÍHO REGULÁTORU POMOCÍ MATLABU

Uvažujme lineární, časově invariantní systém, který je po diskretizaci popsán přenosovou funkcí

$$\gg P=d*(d-0.8) * (d-0.7) / ((1-0.8d) * (1-0.6d) * (1-0.5d)) ;$$

Na daný systém působí (na výstupu) poruchový signál, jehož větší část spektra je soustředěna do oblasti vyšších frekvencí. Úkolem je navrhnout zpětnovazební číslicový regulátor, který zajistí, že špičky ve výstupu v důsledku poruch budou co nejmenší. Schéma zapojení je až na váhovací filtr na vstupu poruchy totožné s obr.1-a. Význam váhovacího filtru  $W(d)$  je právě specifikace poruchového signálu ve frekvenční oblasti. Zvolen byl filtr

$$\gg W=0.5*(1-0.99223d) / (1-0.223d) ;$$

Cílem je tedy minimalizovat  $l_1$  normu vážené citlivostní funkce přes všechny stabilizující regulátory. Neboli

$$\min_{C(d)_{stab.}} \left\| \frac{W(d)}{(1 + P(d)C(d))} \right\|_1$$

Přímým důsledkem Youlovy-Kučerovy parametrizace stabilizujících regulátorů je, že tuto těžkou nelineární optimalizační úlohu s omezením můžeme nahradit lineární úlohou bez omezení:

$$\min_{Q(d)} \|W(d) - W(d)P(d)Q(d)\|_1$$

kde stabilní  $Q(d)$  má význam optimalizační proměnné. Algoritmus uvedený v [1] řeší tento problém jako lineární program

```
>> [C,nu]=l1(W,P*W)
```

Residuals:	Primal	Dual	Duality	Total
	Infeas	Infeas	Gap	Rel
	A*x-b	A'*y+z-f	x'*z	Error
-----				
Iter 0:	5.46e-001	9.35e+000	4.90e+003	1.40e+003
Iter 1:	6.87e-014	6.75e-016	1.00e+003	1.00e+000
Iter 2:	5.19e-014	6.38e-016	3.49e+000	9.96e-001
Iter 3:	1.73e-015	1.34e-015	5.78e-001	3.91e-001
Iter 4:	4.84e-012	1.17e-015	7.15e-002	6.97e-002
Iter 5:	2.82e-013	8.07e-015	7.82e-003	7.82e-003
Iter 6:	5.28e-015	7.45e-016	1.80e-005	1.80e-005
Iter 7:	1.83e-014	4.84e-016	8.99e-010	8.99e-010

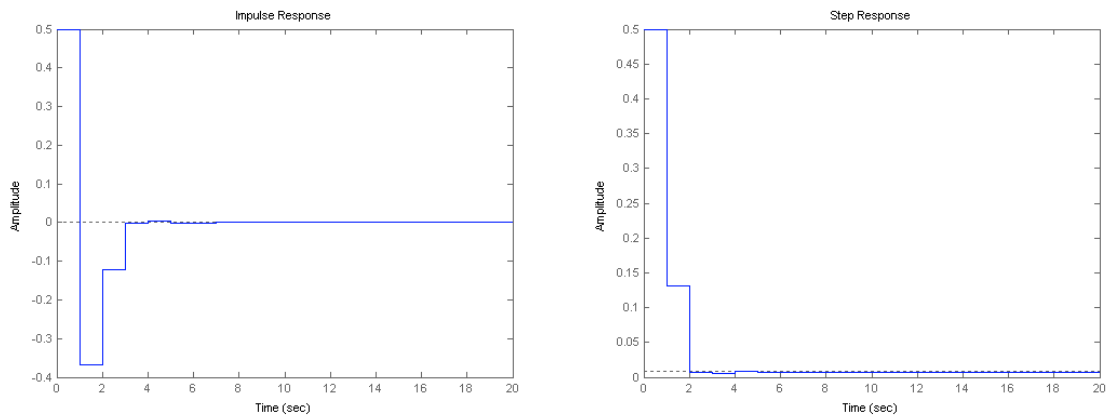
Optimization terminated successfully.

```
C.numerator =
-0.0058d + 0.027d^2 - 0.047d^3 + 0.04d^4 - 0.016d^5 + 0.0025d^6
C.denominator =
0.11d - 0.38d^2 + 0.45d^3 - 0.15d^4 - 0.031d^5 + 0.01d^6
nu =
0.9929
```

Tedy  $l_1$ -optimální regulátor je popsán přenosovou funkcí

$$C(d) = \frac{-0.0058 + 0.027d - 0.05d^2 + 0.047d^3 - 0.04d^4 + 0.016d^5 + 0.01d^6}{0.11 - 0.41d + 0.5d^2 - 0.2d^3}$$

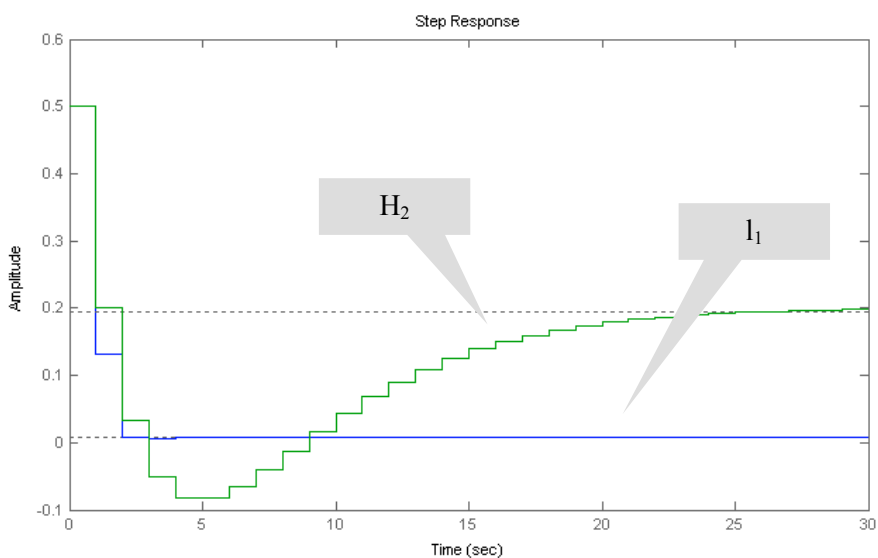
a dosažená hodnota  $l_1$  normy uzavřené zpětnovazební smyčky je  $\nu=0.9929$ . Impulsní charakteristika a odezva na jednotkový skok jsou simulovány v diskrétním čase na obr.2. Už i z odezvy lze vypočítat jednu důležitou vlastnost  $l_1$ -optimálních regulátorů. Po zapojení do zpětnovazební smyčky garantují konečnou impulsní odezvu. Tento jev není důsledkem aproximace.



**Obr. 2.** – a) impulsní a b) přechodová charakteristika  $l_1$ -optimální uzavřené smyčky.

### III. SROVNÁNÍ $l_1$ -OPTIMÁLNÍ REGULACE S $H_2$ -OPTIMÁLNÍ REGULACÍ

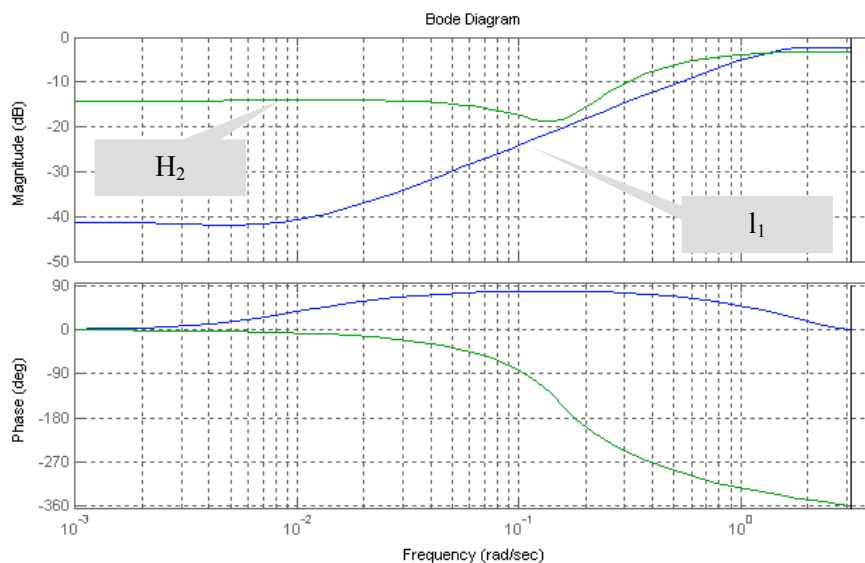
I přestože  $l_1$ -optimální řízení není nijak specializováno na návrh při specifikaci maximálního povoleného přeregulování (overshoot), je určitě oproti ostatním metodám ve výhodě, protože nepřímo je pro splnění požadavků v časové oblasti vybaveno lépe než LQG,  $H_2$  nebo  $H_\infty$  metody.



**Obr.3** – Odezva na jednotkový skok poruchového signálu pro  $l_1$ - a  $H_2$  optimální regulaci.

Hodnoty některých charakteristik a vlastností řešení pro daný příklad jsou uvedeny v tabulce.

	$l_1$	$H_2$
Řád uzavřené smyčky	2 (obecně není omezen)	(obecně $\leq n$ )
Regulátor	stabilní nebo nestabilní, není jediný	stabilní nebo nestabilní, jediný
Struktura uzavřené smyčky	FIR	racionální
$H_2$ norma	0.6337	0.6174
$H_\infty$ norma	0.7755	0.6896
$l_1$ norma	0.9929	1.3671



**Obr.4** – Frekvenční charakteristiky pro  $l_1$ - a  $H_2$  optimální regulaci.

Stejně tak není  $l_1$ -optimální regulátor vybaven nijakou zvláštní robustností, a tak je to spíše jen náhoda, že jsou bezpečnost ve fázi i stabilitě lepší. Bylo by možné najít jiné příklady, kde by se role vyměnily. Z toho důvodu je potřeba robustnost explicitně zahrnout v kritériu optimality.

#### IV. ZÁVĚR

V příspěvku byla představena matlabská funkce `l1.m` pro návrh  $l_1$ -optimálního regulátoru.  $l_1$ -optimální řízení se jeví být zajímavou alternativou k dnes již běžným metodám návrhu jako jsou LQG,  $H_2$  nebo  $H_\infty$ . Vhodné může být především tam, kde je nutné minimalizovat špičky v chybových signálech. Představená matlabská funkce akceptuje popis systému ve formátu Polynomiálního toolboxu a volá funkce Optimalizačního toolboxu. Bude zahrnuta v Polynomiálním toolboxu v některé z jeho příštích verzí.

## LITERATURA

- [1] Dahleh, M.A., Diaz-Bobillo, I.J. *Control of Uncertain Systems: A Linear Programming Approach*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.
- [2] Malaterre P.-O., Khammash,  *$l_1$  controller design for a high-order 5-pool irrigation canal system*, IEEE-CDC conference, Sydney, Australia, December, 2000.
- [3] Kwakernaak, H., Šebek, M. *Polynomial Toolbox for Matlab*, Polyx, Ltd., 2002.