

# SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA NESTACIONÁRNÍCH SIGNÁLŮ S VYUŽITÍM ZOLOTAREVOVÝCH POLYNOMŮ.

Spectral Analysis of Non-Stationary Signals Using Zolotarev Polynomials

*Radim Špetík*

Czech Technical University  
ČVUT FEL K331, Technická 2, 166 27 Praha 6, Czech Republic  
Tel: (+420) 224 352 286, Fax: (+420) 224 310 784  
E-mail: radim.spetik@email.cz

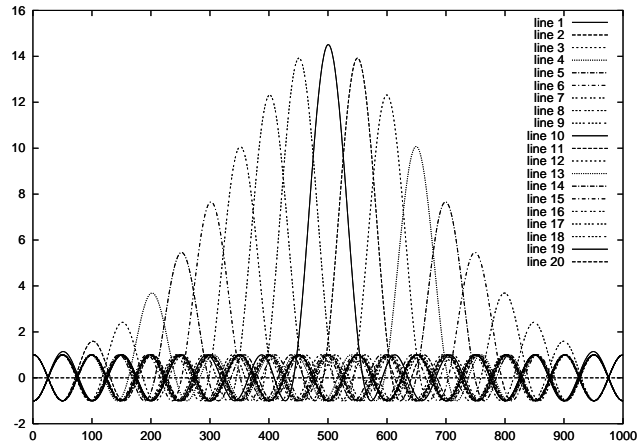
## Abstrakt

Spektrální analýza využívající harmonických funkcí pro rozklad signálu patří mezi klasické metody analýzy signálu. Použitím běžných transformací typu FT, DTFT či DFT lze signál převést z jeho přirozené (nejčastěji časové) oblasti do oblasti kmitočtové. Tímto postupem je veškerá informace nesená signálem v čase transformována na informaci obsaženou v kmitočtovém složení signálu. Přestože je spektrální popis signálu rovnocenný popisu časovému pro jakýkoliv signál, lze úplnou představu o informaci nesené signálem získat z jeho spektra pouze v případě, že zkoumaný signál je stacionární. Pro analýzu nestacionárních signálů existuje několik metod. Typická metoda odvozená od FT, krátkodobá FT (STFT) v sobě skýtá problém dosažení optimálního kmitočtového a časového rozlišení zároveň. Tento problém se pokouší řešit například metoda analýzy signálu využívající vlnkové transformace. Zde popsaná metoda představuje jednu z alternativ analýzy nestacionárních signálů využívající funkcí odvozených od Zolotarevových polynomů [1].

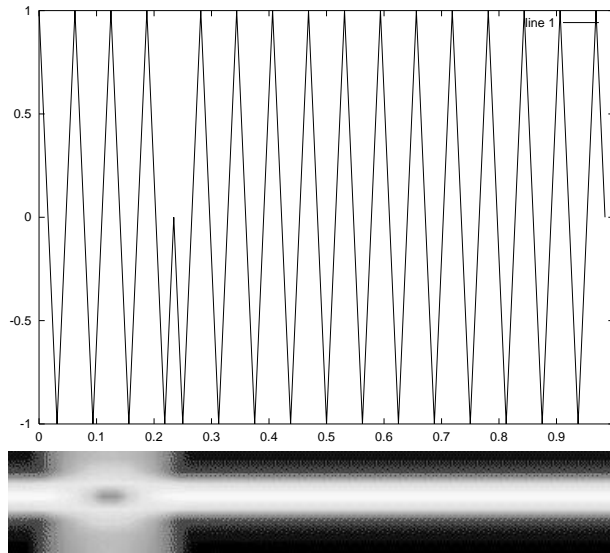
## Popis metody

Zolotarevovy polynomy jsou funkce řešící aproximační úlohu, kterou je možné chápat jakožto zobecněnou aproximační úlohu pro Čebyševovy polynomy. Stejně jako lze pro Čebyševovy polynomy nalézt parametrizaci, jež je transformuje na harmonické funkce, lze i Zolotarevovy polynomy parametrizovat tak, že je lze poté pokládat za zobecněné harmonické funkce. Jako příklad jsou na obrázku 1 uvedeny funkce odvozené od Zolotarevových polynomů stupně  $n = 20$  s parametrem  $k = 0.7$ . Tento parametr může nabývat hodnot 0 až 1. Pokud je  $k = 0$ , pak Zolotarevův polynom přejde identicky v polynom Čebyševův, po jeho vhodné parametrizaci na některou z harmonických funkcí. Se zvyšující se hodnotou parametru  $k$  dochází k nárůstu lokálního maxima a Zolotarevův polynom se stále více odchyluje od polynomu Čebyševova. Pro hodnotu  $k$  blížíci se jedné, maximum diverguje směrem k plus nekonečnu.

Výhodné matematické vlastnosti Zolotarevových polynomů byly využity například v [1], [2] pro konstrukci číslicových filtrů s konečnou délkou impulzové odezvy (FIR) unikátních vlastností. Zdá se, že těchto vyjimečných vlastností Zolotarevových polynomů je možné využít i pro spektrální analýzu nestacionárních signálů.



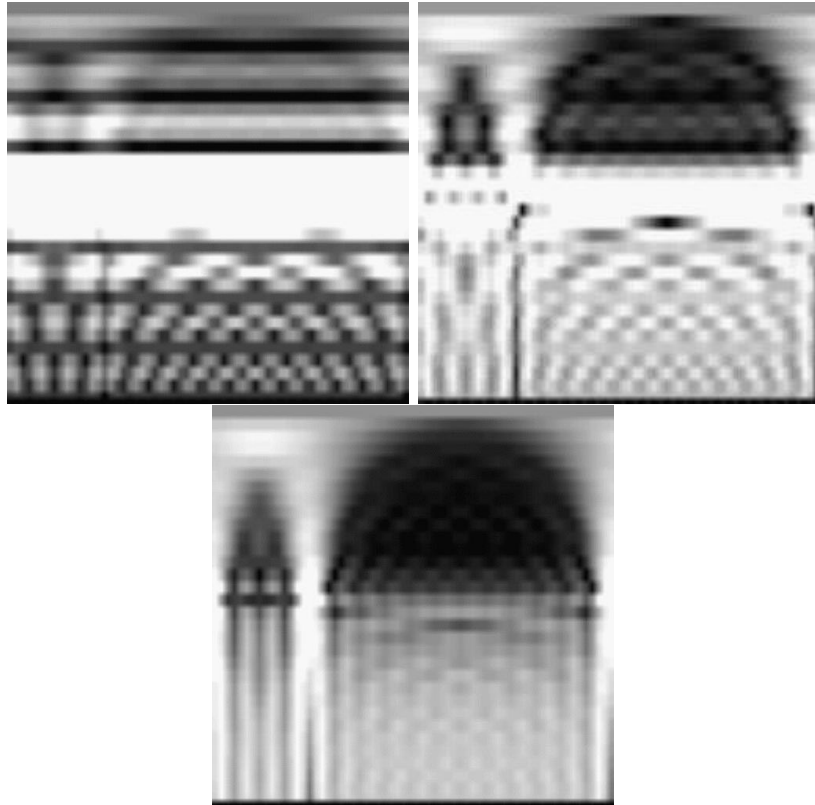
Obrázek 1: Zolotarevovy polynomy stupně  $n = 20$ ,  $k = 0.7$ .



Obrázek 2: Zkušební signál obsahující nestacionaritu a jeho spektrogram pro rozměr DFT  $N = 16$ , přesah 15 vzorků a Hammingovo okno,

Na obrázku 2 je znázorněn zkušební nestacionární signál sestávající ze dvou úseků harmonického signálu. Zkušební signál sestává pouze ze 64 vzorků. Na témže obrázku je spektrogram tohoto signálu, kde parametry použité STFT byly vzhledem k délce signálu zvoleny: rozměr DFT 16 vzorků, překryv 15 vzorků, Hammingovo okno. Jak je z uvedených parametrů i vlastního spektrogramu zřejmé, kmitočtové i časové rozlišení spektrogramu je poměrně dost malé. Použijeme-li pro analýzu téhož signálu funkce založené na Zolotarevových polynomech řádu  $N = 64$  a velikostí maxima  $Z_{max} = 2, 10, 50$ , pak obdržíme obrázky viz. 3.

Je zřejmé, že dosažené časové i kmitočtové rozlišení je v případě použití Zolotarevových polynomů ve srovnání s STFT podstatně lepší. Je zde vidět jak kmitočtové složení signálu, tak také jeho nestacionarita. Vhodnou volbou velikosti maxima Zolotarevova polynomu  $Z_{max}$  pomocí parametru  $k$  lze ve výsledku analýzy zdůraznit více kmitočtové, nebo nestacionární vlastnosti analyzovaného signálu. Výzkumy v oblasti analýzy nestacionár-



Obrázek 3: Analýza signálu z obrázku 2 obsahujícího nestacionaritu pomocí Zolotarevových polynomů s velikostí maxima

$$Z_{max} = 2, 10, 50$$

ních signálů pomocí této jsou metody teprve ve svých počátcích, proto bližší vlastnosti a limity zmiňované metody jsou předmětem dalšího studia.

## Poděkování

Celý tento projekt je realizován na ČVUT-FEL. Rád bych touto cestou poděkoval všem, kteří se na něm jakýmkoliv způsobem podílejí. Zejména chci poděkovat Prof. RNDr. Miroslavu Vlčkovi, DrSc. a Prof. Ing. Pavlu Sovkovi, CSc.

## Literatura

- [1] Vlček, M., Unbehauen, R. : *Zolotarev Polynomials and Optimal FIR Filters*. IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, VOL. XX, NO. Y, MONTH 1999.
- [2] Chen, X., Parks, T. W. : *Analytic Design of Optimal FIR Narrow-Band Filters Using Zolotarev Polynomials*. IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS, VOL. CAS-33, NO. 11, NOVEMBER 1986, PG. 1065–1071.
- [3] Pei, S., Yeh, M. : *An Introduction to Discrete Finite Frames*. IEEE SIGNAL PROCESSING MAGAZINE, 1053-5888, November 1997.