

Komplexní vlnková transformace a filtrace obrazů

Radim Kolář

Jiří Kozumplík

Ústav biomedicínského inženýrství, FEKT, VUT v Brně

Abstrakt

Tento příspěvek se zabývá využitím dyadické vlnkové transformace s komplexními vlnkami pro restauraci obrazových signálů s různým typem rušení. Komplexní vlnky jsou srovnávány s reálnými ortogonálními i biortogonálními.

1 Úvod

Vlnková transformace našla za poslední desetiletí široké uplatnění v řadě oblastí, např. filtraci signálů a obrazů, jejich analýze či kompresi. Podle aplikace se používají různé modifikace vlnkové transformace. Pro filtraci se nejčastěji používá dyadická vlnková transformace (DVT) s reálnými vlnkami (ortogonální či biortogonální) a to jak s podvzorkováním, tak i bez podvzorkování. Ukazuje se, že varianta DVT bez podvzorkování je vhodnější pro filtraci, ovšem za cenu větší výpočetní náročnosti, protože se jedná o redundatní transformaci [1, 7]. To může v oblasti zpracování obrazů hrát důležitou roli, zvláště v případě velkých obrazů. Separabilním rozkladem obrazu pomocí DVT do jedné úrovně totiž dostaneme čtyři nové (pod)obrazy, které nazýváme obrazy horizontálních, vertikálních a diagonálních koeficientů a dále obraz obsahující tzv. aproximační koeficienty, který je možné iterativně dále rozkládat. V každém dalším kroku rozkladu tedy dostaneme tři nové obrazy stejné velikosti. Je-li například velikost obrazu 1024×1024 a 8 bitů na pixel, což odpovídá velikosti $1MB$, tak po rozkladu do tří úrovní dostaneme 10 obrazů, které je nutno zpracovat. To odpovídá celkovému objemu dat $10MB$. Z tohoto hlediska bývá vhodnější použít "klasickou" DVT s decimací.

2 Filtrace pomocí DVT

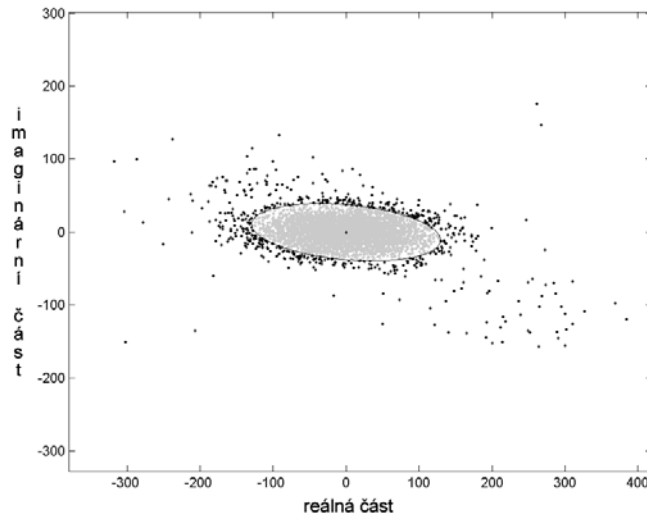
Filtrace pomocí DVT se skládá ze třech základních kroků:

1. Rozklad obrazu pomocí DVT do předem dané úrovně M .
2. Modifikace vlnkových koeficientů v jednotlivých rozkladech.
3. Zpětná DVT.

V prvním kroku je potřeba určit stupeň rozkladu a typ použitých filtrů. V literatuře se často používá rozklad pro $M = 3, 4$. V našem případě jsme použili rozklad do třech úrovní s komplexními vlnkami typu *cdb6* a s reálnými ortogonálními a biortogonálními vlnkami.

Druhý krok má podstatný vliv na výsledek filtrace. Jde jednak o volbu prahovací strategie (tvrdé nebo měkké prahování, Wienerův přístup atd.) a také o samotné stanovení velikosti prahu.

Třetí krok je pak inverzí ke kroku 1.



Obr. 1: Ukázka rozložení komplexních vlnkových koeficientů před a po použití tvrdého prahování

3 Návrh algoritmu pro filtraci

3.1 Prahovací strategie

Na testovacích obrazech bylo zjištěno, že pro filtraci vlnkových koeficientů je vhodnější použití měkkého prahování. To může být zapsáno následujícím způsobem [7]:

$$\hat{\lambda}_j(k, l) = \begin{cases} 0 & |\lambda_j(k, l)| \leq \epsilon_j, \\ \text{sign}(\lambda_j(k, l))|\lambda_j(k, l) - \epsilon_j| & |\lambda_j(k, l)| > \epsilon_j, \end{cases} \quad (1)$$

kde $\lambda_j(k, l)$ je vlnkový koeficient v pásmu j na pozici (k, l) a ϵ_j je práh v pásmu j .

Pro reálné vlnky je prahování dáno vztahem 1. Ovšem v případě použití komplexních vlnek je prahování poněkud složitější. Je to dáno tím, že reálné a imaginární hodnoty vlnkových koeficientů jsou spolu do jisté míry korelované a sledují bi-normální rozložení [3, 4]. Jestliže tedy vykreslíme rozložení těchto koeficientů v komplexní rovině, zjistíme, že má eliptický tvar (Obr. 1). V případě, že by reálné a imaginární části spolu nebyly korelované, tvar by připomínal kruh. Při prahování je tedy vhodné vzít v úvahu tvar rozložení koeficientů. To lze provést snadno tak, že prahovací křivka bude mít tvar elipsy, která je určena třemi parametry - středem a délkou hlavní a vedlejší poloosy. Toto prahování nazveme eliptické [3, 4]. Zjištění hodnot parametrů prahovací elipsy je popsáno v následujícím odstavci.

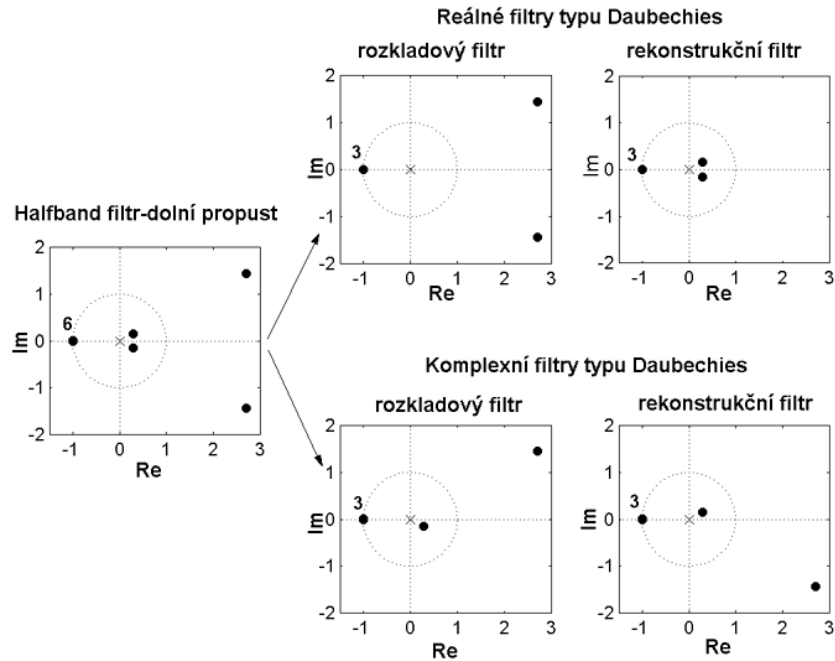
3.2 Stanovení prahu

Pro stanovení úrovně prahu lze využít některé ze známých metod. Například universální práh [2], práh typu SURE [8] a další. Jednotlivé metody a jejich modifikace dávají poměrně rozdílné výsledky; v našem případě jsme zvolili postup založený na vztahu

$$\epsilon_j = \tau_j \sigma_j, \quad (2)$$

kde σ_j je rozptyl šumu v pásmu j a τ_j je multiplikatívni konstanta, kterou je potřeba stanovit. Stanovení této konstanty je pro filtraci podstatné. Jestliže je příliš vysoká, dojde kromě odstranění šumu i k odstranění užitečných vlnkových koeficientů. Jestliže je naopak příliš malá, zůstane po filtraci v obrazu i šum. Jde tedy o nalezení určité optimální hodnoty.

V této práci nám jde o porovnání komplexních a reálných vlnek pro filtraci. Abychom mohli zlepšení obrazu nějak hodnotit, budeme předpokládat, že známe originální obraz, který zašumíme různou úrovní aditivního a multiplikatívniho šumu. Pro kvantifikaci úspěšnosti filtrace



Obr. 2: Rozklad nulových bodů a pólů half-band systému na rozkladový a rekonstrukční filtr (reálný *db3*, resp. komplexní *cdb6*)

použijeme poměr signálu ku šumu, definovaný jako

$$SNR = \frac{\sum x_{original}^2}{\sum (x_{original} - x_{odhad})^2}, \quad (3)$$

kde $x_{original}$ je originální (nezarušený) obraz a x_{odhad} je obraz po filtraci. Sumace se provádí přes všechny pixely obrazu.

Ve vztahu (2) budeme hledat takovou hodnotu prahu ϵ_j , pro kterou je SNR maximální. Pro nalezení použijeme optimalizační metodu založenou na výpočtu gradientu optimalizační funkce.

V případě použití komplexních vlnek je optimalizační postup stejný. Je pouze potřeba určit střed prahovací elipsy a velikosti jejich poloos. Střed elipsy je umístěn v počátku, což vyplývá z vlastností vlnkové transformace. Velikosti poloos lze určit podobně jako ve vztahu (2), ovšem zvláště pro reálnou a imaginární část vlnkových koeficientů.

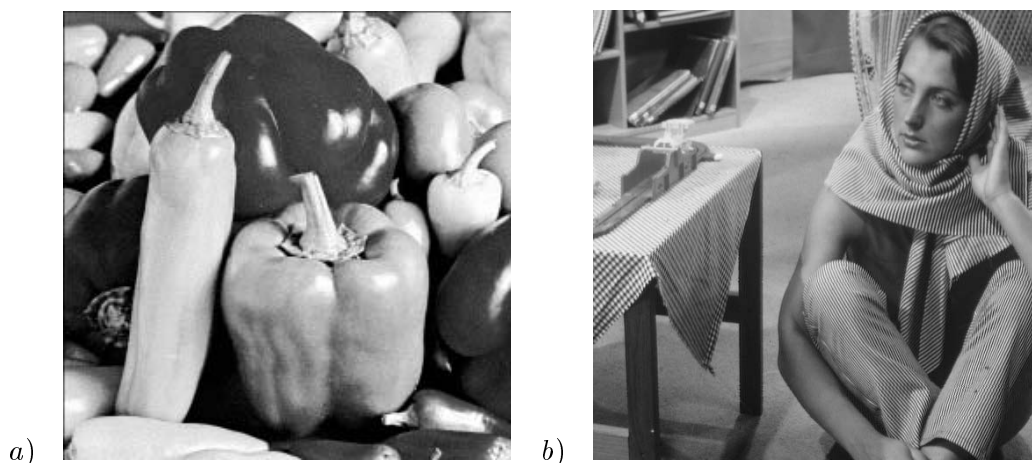
3.3 Volba typu vlnek

Pro filtraci byly použity jak reálné vlnky, tak i komplexní. Z reálných vlnek (resp. filtrů) byly využity ortogonální vlnky typu Daubechies, označované v Matlabu jako *db1*, *db2*, *db3*, ... a dále biortogonální vlnky *bior2.2*.

Konstrukce impulsních charakteristik komplexních vlnkových filtrů je obdobná jako konstrukce filtrů reálných. Vychází se také z tzv. half-band filtru, který se rozloží na rozkladový a rekonstrukční filtr [6]. Zatímco u reálných filtrů se vezmou vždy komplexně sdružené dvojice nulových bodů, u komplexních filtrů tomu tak není (Obr. 2). Výsledná impulsní charakteristika je proto komplexní a tomu odpovídají komplexní vlnkové funkce.

3.4 Odhad rozptylu šumu

Ve vztahu (2) pro určení prahu je kromě prahovací konstanty, která se určí optimalizací, také rozptyl šumu, resp. jeho odhad. Práh je součinem těchto dvou hodnot z toho důvodu, že lze



Obr. 3: Originální obrazy: a) *fruit*, b) *barb*

předpokládat jeho závislost na úrovni šumu vyjádřené jejím rozptylem. To odpovídá například i tvaru pro tzv. univerzální práh [2].

Pro odhad rozptylu šumu v jednotlivých pásmech a směrech jsme použili následující postup:

1. filtrace zašuměného obrazu mediánovým filtrem - získáme tak první odhad originálního obrazu;
2. odečtení tohoto prvního odhadu od zašuměného obrazu - získáme tzv. šumový obraz;
3. rozklad šumového obrazu pomocí DVT - získáme korespondující obrazy vlnkových koeficientů;
4. výpočet rozptylu v jednotlivých pásmech;

Tímto postupem tak získáme jednotlivé hodnoty σ_j ve všech úrovních pro horizontální, vertikální a diagonální směry.

4 Filtrace obrazů

Pro testování navrženého filtračního postupu a pro porovnání reálných a komplexních vlnek byly použity dva obrazy s různou úrovní šumu. První obraz (*fruit* o velikosti 256×256) obsahuje především větší plochy s různými úrovněmi šedi bez výraznějších textur. Druhý obraz (*barb* o velikosti 512×512) kromě lidské tváře má i výraznější textury (vyšší frekvenční složky). Oba obrazy jsou na Obr. 3.

Byly uvažovány jsme dva typy šumu - aditivní šum s Gaussovským rozložením a multiplikativní šum typu *spekle*. Ten se vyskytuje například u ultrazvukových [5, 9] či radarových snímků [3, 4].

4.1 Aditivní šum

Pro zarušení obrazu s definovanou úrovní šumu byla použita funkce matlabovská *imnoise*. Byla zvolena úroveň šumu 10 a $15dB$. V Tab. 1 jsou uvedeny hodnoty SNR po filtraci pro případy nízké úrovně šumu ($SNR = 15dB$) a vysoké úrovně šumu ($SNR = 10dB$). Z hodnot lze vyvodit závěr, že z hlediska SNR jsou jako vhodné zejména komplexní vlnky, případně korespondující reálné ortogonální vlnky, které dosahují o málo menších hodnot SNR. Jako nevhodné se jeví Haarovy vlnky, případně i biortogonální. Zde je uveden pouze jeden zástupce *bior2.2*. Byly však testovány i některé další typy a bylo zjištěno, že jak z vizuálního hlediska, tak i z hlediska výsledného SNR nejsou tyto typy pro náš případ vhodné. Také ortogonální vlnky nižších řádů

Tab. 1: Hodnoty SNR v dB pro aditivní šum.

SNR na počátku	<i>barb</i>		<i>fruit</i>	
	10	15	10	15
<i>db1</i>	16.57	19.11	16.17	19.75
<i>db3</i>	17.25	19.80	16.93	20.47
<i>db5</i>	17.32	19.89	17.27	20.70
<i>bior2.2</i>	16.82	19.38	16.73	20.34
<i>cdb6</i>	17.48	20.14	17.10	20.84
<i>cdb10</i>	17.64	20.35	17.36	20.98

Tab. 2: Hodnoty SNR v dB pro šum typu *spekle*.

SNR na počátku	<i>barb</i>		<i>fruit</i>	
	10	15	10	15
<i>db1</i>	15.54	19.04	14.04	18.88
<i>db3</i>	15.85	19.48	14.18	19.10
<i>db5</i>	15.78	19.44	14.12	18.00
<i>bior2.2</i>	15.56	19.15	14.13	18.37
<i>cdb6</i>	16.02	19.80	14.25	19.46
<i>cdb10</i>	16.04	19.93	14.33	19.45

nejsou vhodné, protože se ve výsledném obrazu projevuje jejich tvar (především Haarovy vlnky). Ukázky výsledků filtrace jsou na Obr. 4 a 5. Jejich porovnáním lze pozorovat, že biortogonální vlnky jsou pro filtraci z vizuálního hlediska nejméně vhodné, protože obrazy mají stále poměrně vysokou úroveň šumu, což je vizuálně patrné. Porovnáním s originálem je také vidět, že došlo k většímu potlačení textur ve filtrovaném obraze. U obrazu *fruit* je tomu podobně. Porovnáním komplexních a reálných ortogonálních vlnek lze dospět k závěru, že v obou případech je úroveň šumu téměř stejná. V případě použití reálných vlnek je v některých částech obrazu patrně větší rozmazání na hranách, než je tomu u komplexních vlnek.

4.2 Multiplikativní šum typu *spekle*

Pro zarušení obrazu s definovanou úrovní multiplikativního šumu byla použita opět funkce *im-noise*. V Tab. 2 jsou pak uvedeny hodnoty SNR po filtraci pro stejné hodnoty počáteční úrovně šumu, jako v předchozím případě.

Jelikož se však jedná o multiplikativní šum, tak je potřeba jej před vlastní filtrací převést na aditivní. To lze provést jednoduše pomocí logaritmu (funkce *log*). Teprve na takto upravený obraz jsme použili navrženou metodu. Po filtraci je nutné obraz převést zpět pomocí funkce *exp*.

Z hodnot lze vyvodit stejný závěr jako v případě aditivního šumu. Ukázky filtrace pro případ multiplikativního šumu jsou na Obr. 6 a 7. Také jejich porovnáním lze vyvodit podobné závěry jako pro aditivní šum.

5 Zhodnocení

Z uvedených hodnot SNR je vidět, že s komplexními vlnkami lze dosáhnout nejlepších poměrů SNR. I z vizuálního hlediska se komplexní vlnky jeví jako vhodnější a to především ve srovnání s biortogonálními. Korepondující reálné ortogonální vlnky jsou téměř srovnatelné. Na hranách se ovšem v některých případech projevují viditelnější artefakty, což může být pro další zpracování obrazu (např. detekce hran) nežádoucí.



Obr. 4: Ukázky filtrace obrazu *barb* pro počáteční SNR=15dB (aditivní šum). a) zašuměný obraz a dále filtrace s vlnkami: b) *bior2.2*, c) *db3* a d) komplexní *cdb6*.

Poděkování

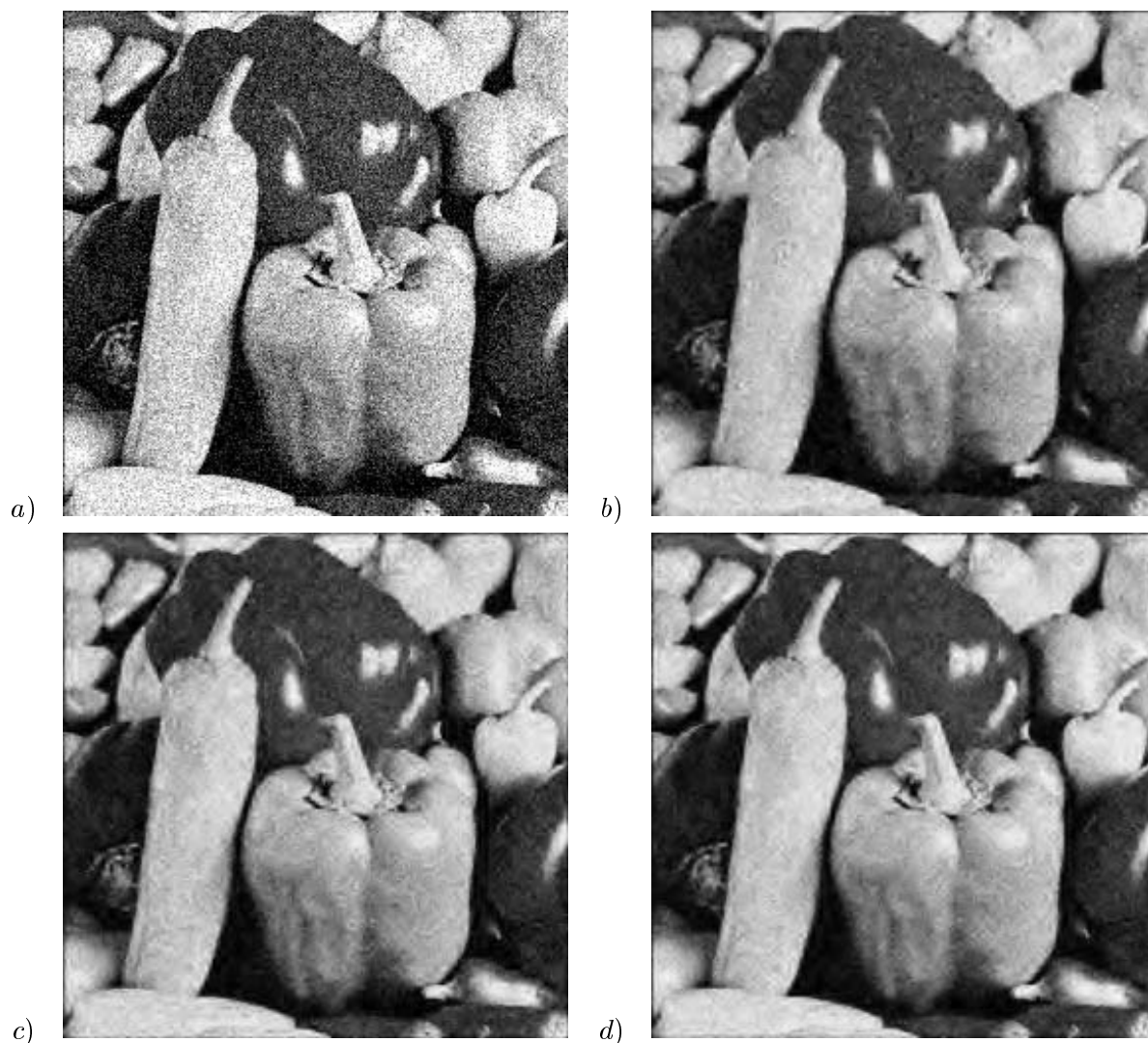
Tato práce byla vypracována za podpory Grantové agentury České republiky, reg. číslo grantu 102/02/0890 a výzkumného záměru číslo CEZ J22/98:262200011.

Kontaktní adresa

Ústav biomedicínského inženýrství, FEKT, VUT v Brně
 Purkyňova 118, 602 00 Brno
 tel. (+420 5)41149551, fax (+420 5) 41149564,
 e-mail: kolarr@fec.vutbr.cz

Reference

- [1] Coifman, R.R., Donoho, D.L. Translation invariant de-noising. <http://www-stat.stanford.edu/~donoho/Reports>, 1995
- [2] Donoho, D.L. De-Noising by Soft-Thresholding. *IEEE Trans. Inform. Theory* 41: 613-627, 1995



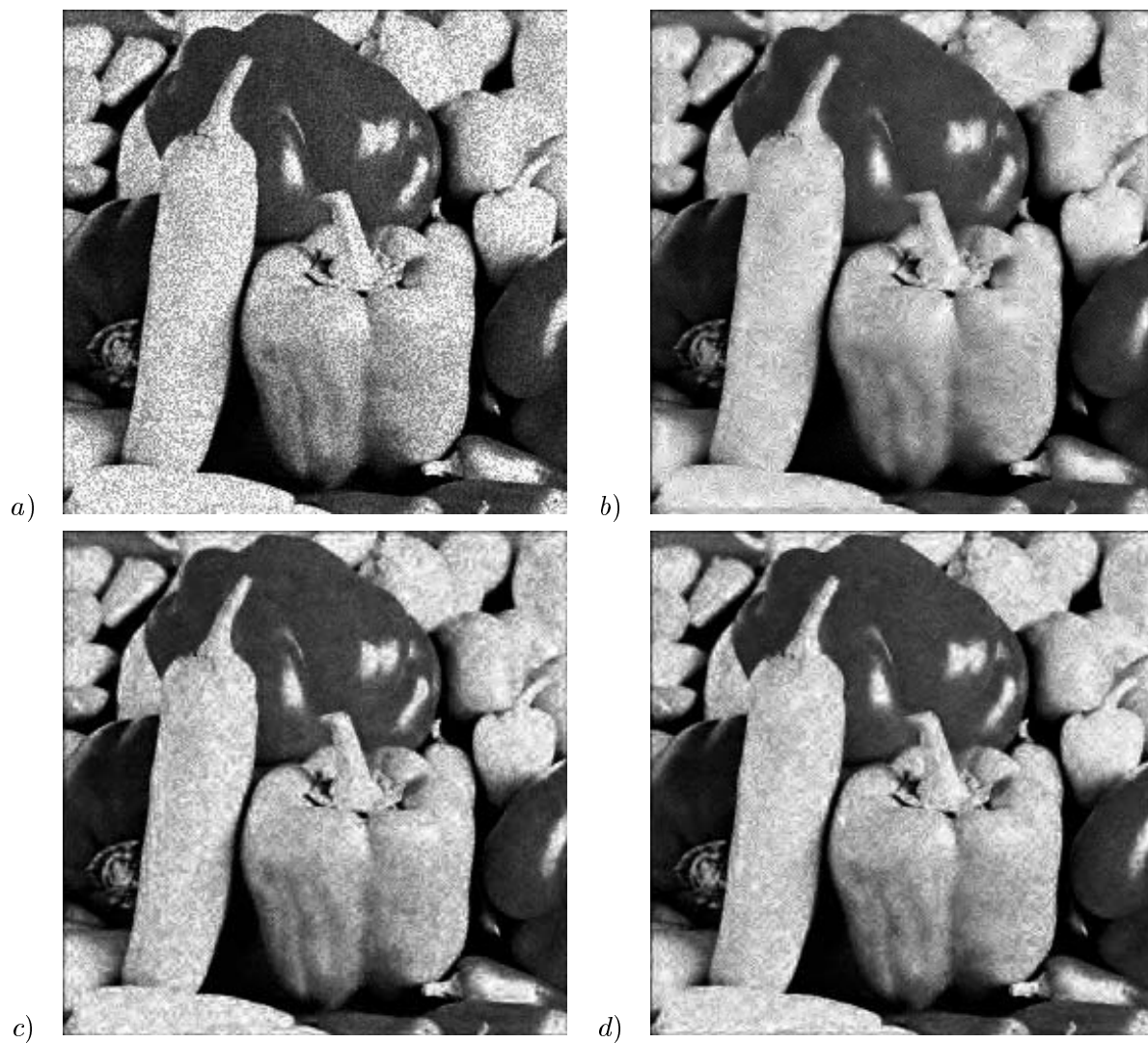
Obr. 5: Ukázky filtrace obrazu *fruit* pro počáteční SNR=15dB (aditivní šum). a) zašuměný obraz a dále filtrace s vlnkami: b) *bior2.2*, c) *db3* a d) komplexní *cdb6*.

- [3] Gagnon,L., Smaili,F.D. Speckle noise reduction of airborne SAR images with symmetric Daubechies wavelets. SPIE Proc. #2759, 1996
- [4] Gagnon,L., Jouan,A. Speckle Filtering of SAR Images - A Comparative Study Between Complex-Wavelet-Based and Standard Filters. Wavelet Applications in Signal and Image Processing, San Diego, 1997
- [5] Hao,X., Gao,S., Gao,X. A Novel Multiscale Nonlinear Thresholding Method for Ultrasonic Speckle Suppressing, IEEE Transactions on Medical Imaging, vol.18, no.9, 787-794, 1999
- [6] Leou,J.L., Huang,J.M. et al. Construction of Complex-Valued Wavelets and It Applications to Scattering Problems. IEICE Tran. Commun. E83-B, 6: 1298-1307, 2000
- [7] Mallat,S.G. A Theory for Multiscalesolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligencem vol.11, No.7, 974:693, 1989
- [8] Stein,Ch.M. Estimation of the mean of a multivariate normal distribution, The Annals of Statistics, vol.9, No.6,1135-1151,1981



Obr. 6: Ukázky filtrace obrazu *barb* pro počáteční SNR=15dB (multiplikativní šum). a) zašuměný obraz a dále filtrace s vlnkami: b) *bior2.2*, c) *db3* a d) komplexní *cdb6*.

- [9] Xuli Zong, A.F.Laine, E.A.Geiser, Speckle reduction and contrast enhancement of echocardiograms via multiscale nonlinear processing, IEEE Transaction on Medical Imaging vol.17, no.4, pp.532-540, 1998



Obr. 7: Ukázky filtrace obrazu *fruit* pro počáteční SNR=15dB (multiplikativní šum). a) zašuměný obraz a dále filtrace s vlnkami: b) *bior2.2*, c) *db3* a d) komplexní *cdb6*.