

# Užití systému MATLAB pro stanovení vlivu konfigurace na přesnost geodetických úloh

Radek Dušek

katedra fyzické geografie a geoekologie  
Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita v Ostravě

## Abstrakt:

Konfigurace daných a určovaných bodů je jedním z parametrů, které rozhodují o přesnosti geodetické úlohy. Pro úlohy obsahující tři body jsou tyto vlivy snadno spočitatelné a pro základní úlohy i všeobecně známé. V případě většího počtu bodů roste počet proměnných a jsou tak kladeny vyšší nároky jak na výpočetní postupy, tak na názornou vizualizaci a interpretaci výsledků. V příspěvku je na příkladu úlohy „protínání zpět“ řešen vliv konfigurace pomocí systému MATLAB.

## Úvod

Výpočet souřadnic bodů na základě daných bodů a provedených měření je standardní geodetická úloha a výpočty jsou obsaženy v nejrůznějších geodetických programech. Složitější situace je v případě určování přesnosti vypočtených souřadnic. Určení přesnosti lze provádět např. pomocí modelového řešení geodetické úlohy. S teorií je možné se seznámit v geodetické literatuře (např. [1], [2]), ale praktické výpočty nejsou obsaženy v geodetických programech a je nutné je buď programovat nebo využít obecných matematických programů. Jednou z možností je systém MATLAB, který je např. na katedře geodézie a pozemkových úprav FSv ČVUT pro tyto výpočty již dlouhodobě používán (např. [3], [4], [5]). Cílem příspěvku je ukázat možnost využití MATLABu pro jednu z možných aplikací chybového modelu geodetické úlohy a tou je určení optimální konfigurace bodů.

## Vliv konfigurace na přesnost geodetické úlohy

Konfigurace (rozložení bodů) je spolu s přesností měření a přesností daných souřadnic parametrem ovlivňujícím přesnost výsledné polohy určovaných bodů, resp. výsledných souřadnic. Pro úlohy obsahující tři body – dva dané a jeden určovaný (např. rajon, protínání z úhlů, protínání z délek) se optimální konfigurace hledá jako minimum funkce dvou proměnných (dvě souřadnice třetího bodu). Jde vlastně o nalezení vhodného tvaru trojúhelníku, přičemž tvary trojúhelníku lze zkoumat a všechny možnosti vyčerpat změnou polohy jednoho vrcholu (dva vrcholy jsou pevné). Velikost trojúhelníku je potom dána vzdáleností pevných bodů, ale tato vzdálenost neovlivňuje výsledek, protože tím je tvar trojúhelníku a vzdálenost zde reprezentuje pouze měřítko

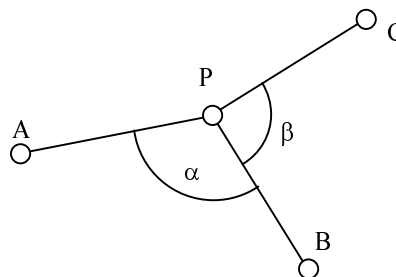
Pro geodetické úlohy obsahující více než tři body (např. pro čtyři body to jsou protínání zpět a Hanzenova úloha, pro šest bodů Markova úloha apod.) je stanovení optimální konfigurace složité z důvodu většího množství proměnných – čtyři a více. Tyto počty proměnných sice znamenají složitější výpočty, ale hlavně jsou náročné na geometrickou interpretaci. Představa či znázornění grafu funkce dvou proměnných je triviální, pro čtyři a více proměnných již „běžný“ trojrozměrný prostor nestačuje – přitom je jednoduchá „praktická“ interpretace nezbytná, pokud má být výsledek aplikovatelný v geodetické praxi. Jako příklad pro řešení této problematiky byla zvolena v praxi neuváženější úloha a tou je protínání zpět.

## Protínání zpět

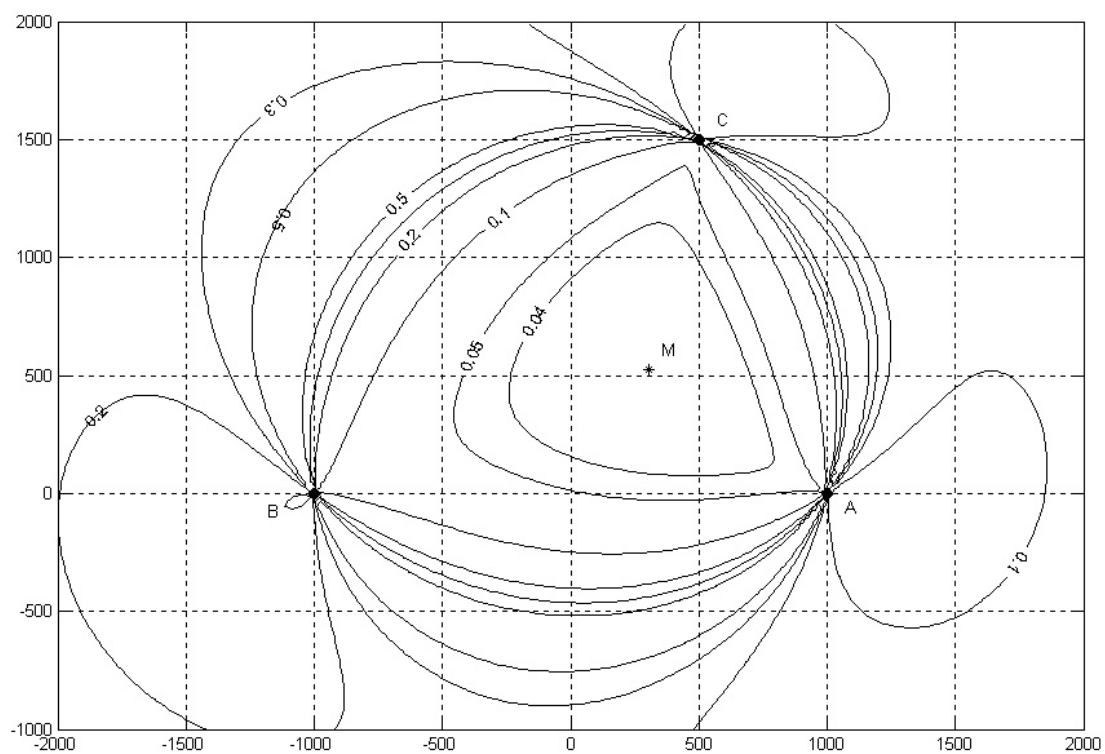
Každá geodetická úloha je dána třemi druhy veličin:

1. známými souřadnicemi tzv. pevných bodů – pro protínání zpět to jsou tři body (na obr. 1 body A, B a C),
2. neznámými souřadnicemi tzv. určovaných bodů – pro protínání zpět jeden bod (na obr. 1 bod P),
3. měřenými veličinami – pro protínání zpět dva úhly s vrcholy v určovaném bodě (na obr. 1 úhly  $\alpha$  a  $\beta$ ).

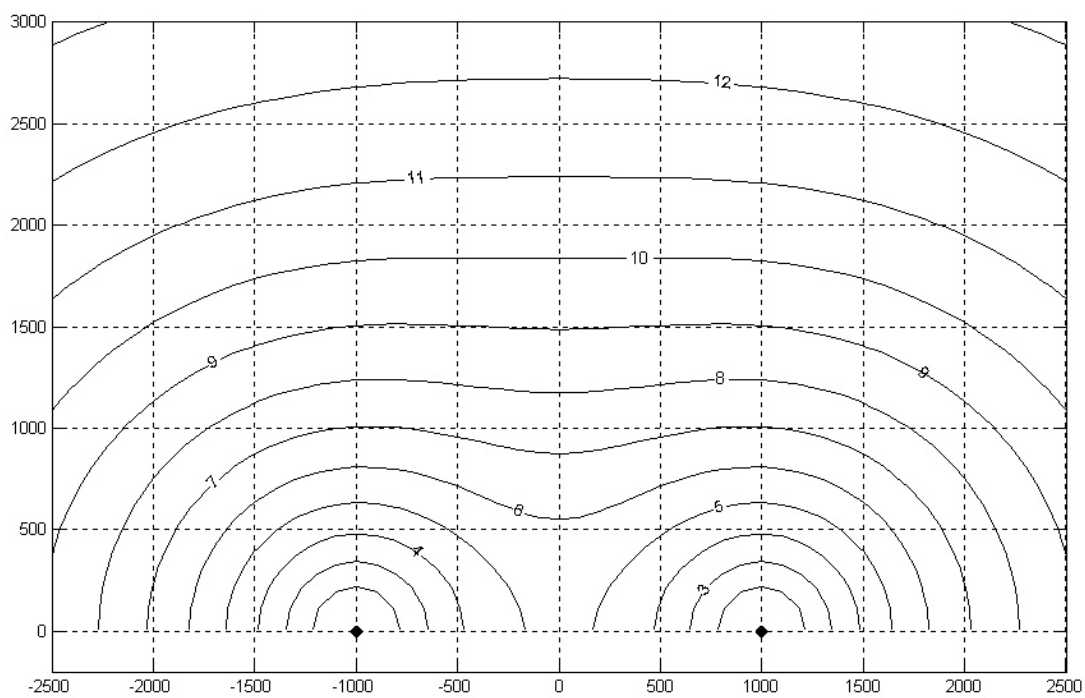
Pro konkrétní rozmístění tří daných bodů je snadné najít takovou polohu určovaného bodu, aby přesnost určení polohy byla maximální. Jako charakteristika přesnosti určení polohy bodu se nejčastěji používá střední polohová nebo střední souřadnicová chyba [6]. Na obr. 2 je ukázka přesnosti určení souřadnic v závislosti na poloze bodu P pro konkrétní rozložení bodů A, B, C. Přesnost je charakterizována střední polohovou chybou – jedná se o funkci dvou proměnných znázorněnou izoliniemi. Hvězdičkou s písmenem M je označeno minimum funkce, tedy optimální poloha určovaného bodu. Z obrázku je patrné, že průběh funkce je dosti složitý. Od minima uvnitř trojúhelníku ABC hodnota narůstá směrem k tzv. nebezpečné kružnici (kružnice opsaná trojúhelníku ABC – leží-li určovaný bod na této kružnici nelze jednoznačně určit jeho polohu), po poklesu hodnot za kružnicí s rostoucí vzdáleností opět hodnoty narůstají s výjimkou malých ploch nad vrcholy trojúhelníku. Vzhledem k tomu, že tvar trojúhelníku ABC může být různý (až např. k třem bodům ležícím na přímce) může se podstatně měnit i průběh funkce.



Obr. 1 Princip protínání zpět



Obr. 2 Přesnost protínání zpět pro tři pevné body



Obr. 3 Výsledné izoliny přesnosti – podrobný popis v textu

### Postup řešení

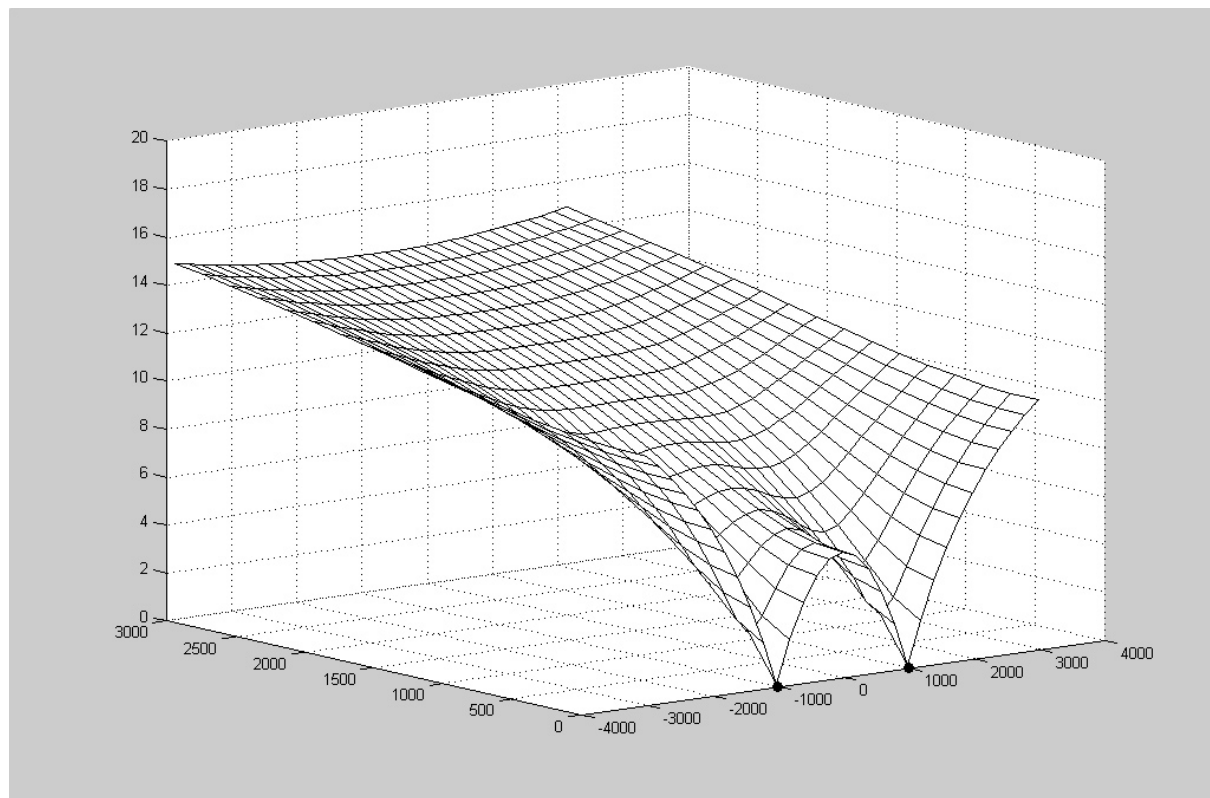
Hledání optimální konfigurace čtyř bodů znamená pro dva pevné body (jejich vzdálenost představuje měřítko) hledat nevhodnější polohu dalších dvou bodů. Pro snazší geometrickou interpretaci bylo řešení rozděleno do dvou kroků:

1. ke dvěma pevným bodům byl zvolen třetí „pevný“ bod (pevný v rámci tohoto kroku), následovalo nalezení optimální polohy čtvrtého bodu (hodnoty dvou proměnných lokalizujících minimum funkce) a výpočet charakteristiky přesnosti, tedy střední polohové chyby, která je hodnotou minima. Tato hodnota byla jako funkční hodnota přiřazena k poloze (dvěma souřadnicím = dvěma proměnným) třetího – „pevného“ – bodu a tak byla vytvořena nová funkce dvou proměnných,
2. nalezení minima nově vytvořené funkce, resp. znázornění průběhu této funkce grafem, ze kterého vyplyne poloha minima. Poloha minima představuje optimální polohu třetího bodu a pro takto rozmístěné tři body je možné jednoznačně (pomocí kroku 1) stanovit polohu čtvrtého bodu.

Další výhodou tohoto postupu byla možnost využít již vytvořených funkcí pro modelové řešení geodetické úlohy protínání zpět. Tyto funkce byly použity v rámci kroku 1 – jejich výsledkem je např. obr. 2.

### Použití MATLABu

K výpočtu byl použit program MATLAB. S výhodou bylo využito snadné a přehledné programování výpočtů a možnost definování vlastních funkcí. K značnému usnadnění výpočtů přispěly vestavěné funkce, zejména maticové funkce a funkce `fminsearch` – hledání minima funkce více proměnných, a dále možnost odkazovat na již vytvořené soubory a funkce. Výsledky výpočtů byly znázorněny pomocí grafů funkcí s využitím možnosti editování vytvořených obrázků.



Obr. 4 Plocha průběhu přesnosti vyjádřená izoliniemi na obr. 3

### Výsledky

Výsledek výpočtu je znázorněn na obrázcích 3 a 4. Na obrázku 3 jsou zobrazeny dva pevné body o souřadnicích  $(-1000, 0)$  a  $(+1000, 0)$  a pomocí izolinií průběh funkce dle výše popsaného kroku 2. Na obrázcích je zachycena polovina výsledku, celý obrázek je symetrický podle osy  $x$ . Hodnoty izolinií jsou fiktivní, skutečné hodnoty by byly dány přesností měřených úhlů a skutečnou vzdáleností dvou pevných bodů.

Z grafu vyplývá, že minima funkce jsou v okolí obou pevných bodů. Vzhledem k tomu, že v rámci úlohy protínání zpět nemohou dva body splynout, je pro maximální přesnost nejvhodnější, aby třetí z bodů ležel co nejbližší jednomu z pevných. Výsledek je celkem překvapivý, protože obecně jsou pro geodetické úlohy nejvýhodnější pravidelné obrazce, tedy zde by se nabízel rovnostranný trojúhelník. Průběh funkce s minimy v pevných bodech je názorně zobrazen na obr. 4.

Při hledání optimální polohy čtvrtého (určovaného) bodu vychází opět okolí dvou pevných bodů. Je tedy možné konstatovat, že pro protínání zpět je nejvýhodnější, aby dva ze tří pevných bodů ležely blízko sebe a určovaný bod opět v jejich okolí.

### **Závěr**

Výpočet ověřil jak popsaný postup použitý k řešení, tak vhodnost využití programu MATLAB. M-soubory vytvořené pro provedení výpočtů a vytvoření obrázků budou modifikovány pro řešení dalších geodetických úloh obsahujících více než tři body.

*Příspěvek vznikl v rámci Institucionálního výzkumného záměru Přírodovědecké fakulty Ostravské univerzity – VZO, CEZ: JO9/98: 173100002.*

### **Literatura:**

- [1] Ingeduld, Miloslav et al. Geodézie: Metody výpočtu a vyrovnání geodetických sítí. Praha: ČVUT, 1990. 242 s. ISBN 80-01-00333-7
- [2] Jandourek, Jan – Ratiborský, Jan. Geodézie VI: Způsoby vyrovnání geodetických sítí v  $E_2$  a  $E_3$ . Praha: ČVUT, 1995. 160 s. ISBN 80-01-01343-X
- [3] Dušek, Radek – Vlasák, Josef. Geodézie 40: Příklady a návody na cvičení. Praha: ČVUT, 1998. 127 s. ISBN 80-01-01929-2
- [4] Břízová, Alena. Využití matematického programu MATLAB pro geodetické výpočty včetně řešení chybového modelu. Praha, 1999. Diplomová práce na Stavební fakultě ČVUT katedře geodézie a pozemkových úprav. Vedoucí diplomové práce Josef Vlasák
- [5] Čábelka, Miroslav. Program MATLAB a jeho využití v geodézii. Praha, 2001. Diplomová práce na Stavební fakultě ČVUT katedře geodézie a pozemkových úprav. Vedoucí diplomové práce Josef Vlasák
- [6] Böhm, Josef – Radouch, Vladimír – Hampacher, Miroslav. Teorie chyb a vyrovnávací počet. GKP Praha 1990, 416 s. ISBN 80-7011-056-2

**Kontakt:** radek.dusek@osu.cz