

IDENTIFIKACE DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

Miroslav Balda

Nové technologie – Výzkumné centrum v západočeském regionu

1 Úvod

Mějme jako objekt pozorování lineární diskretní dynamický systém, jehož vlastnosti nás zajímají. Pojmeme identifikace označujeme proces ztotožňování matematického modelu s dílem. Ten má v zásadě tři fáze – měření, odhadování struktury díla a zjišťování parametrů modelu.

V první etapě se ze vstupů $\mathbf{x}(t)$ dimenze n a výstupů $\mathbf{y}(t)$ dimenze m odebírají vzorky $\mathbf{x}(kT)$ a $\mathbf{y}(kT)$ a vytvářejí se maticové časové řady. V druhé etapě se odhaduje struktura díla určující složitost matice frekvenčních přenosů $\mathbf{G}_m \approx \mathbf{G}_m(\mathbf{c}, f)$ jeho matematického modelu. Zde \mathbf{c} jsou parametry systému a f je frekvence. K tomu lze s výhodou využít předběžné informace o tvaru frekvenčních přenosů a počtu výrazných rezonancí v nich. K přechodu z časové oblasti do frekvenční se použije diskretní konečná Fourierova transformace, obvykle ve verzi FFT. V poslední etapě se numerickými postupy určují neznámé „koeficienty“ – parametry díla. Všechny etapy nemusí probíhat v reálném čase zkoušky, pokud výsledky identifikace neslouží k okamžitému regulačnímu zásahu.

Metody pro identifikaci diskretních soustav dělíme na přímé a nepřímé.

2 Přímá identifikace SISO systémů

Problém identifikace jednoduchých systémů s jedním vstupem a jedním výstupem, SISO systémů, se objevil před více jak 50 lety v letectví a automatickém řízení. Uvedme dále dvě metody odhadu parametrů SISO systému z jeho měřeného frekvenčního přenosu $G(p)$, kde $p = i2\pi f$.

2.1 Lineární regrese s iterací

Frekvenční přenos matematického modelu lineárního SISO systému má tvar

$$G_m(p) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{\sum_{j=0}^n a_j p^j}. \quad (1)$$

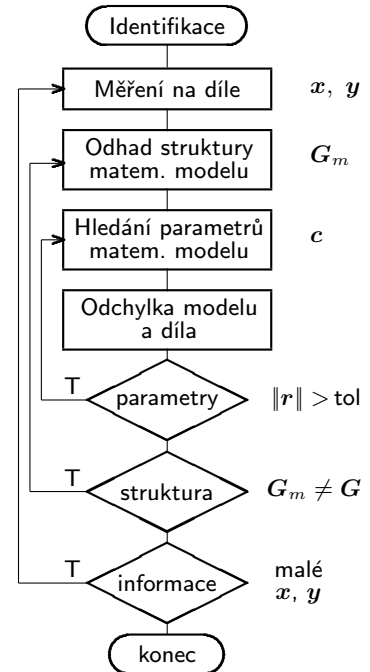
Koeficient b_0 se obvykle volí jako $b_0 = 1$.

Dosadíme-li hodnoty měřeného frekvenčního přenosu pro všechny budící frekvence f_k do sloupcového vektoru $\mathbf{g}(p)$, potom rozdíl mezi matematickým modelem a měřením charakterizuje vektor reziduí

$$\mathbf{r}(p) = \mathbf{g}_m(p) - \mathbf{g}(p), \quad (2)$$

kde $\mathbf{g}_m(p)$ je vektor náhradního frekvenčního přenosu při stejných frekvencích jako u $\mathbf{g}(p)$. Pro k -tou frekvenci potom platí

$$\frac{\sum_{j=0}^m b_j p_k^j}{\sum_{j=0}^n a_j p_k^j} - G(p_k) = r_k; \quad i = 1, 2, \dots \quad (3)$$



Obr. 1. Proces identifikace

Přímé řešení tohoto problému lineární regrese není možné, protože neznámé koeficienty a_j jsou ve jmenovateli zlomku. Rovnici (3) je však možno jím pronásobit a dostat tak vztah

$$\sum_{j=0}^n a_j p_k^j G(p_k) - \sum_{j=1}^m b_j p_k^j = 1 - r_k \underbrace{\sum_{j=0}^m a_j p_k^j}_{w_k}, \quad (4)$$

ve kterém jsou neznámé koeficienty a_j a b_j na levé straně rovnice již v lineární vazbě. Rovnici (4) přepíšeme do tvaru skalárního součinu

$$[G(p_k), p_k G(p_k), \dots, p_k^n G(p_k) | -p_k, -p_k^2, \dots, -p_k^m] \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \\ \hline b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \doteq 1. \quad (5)$$

Při změně frekvence na všechny f_k vznikne soustava komplexních lineárních algebraických rovnic

$$\mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{y} \quad (6)$$

s řešením optimálním ve smyslu metody nejmenších čtverců („+“ v exponentu značí pseudoinverzi)

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}^+ \mathbf{y} \quad (7)$$

obsahujícím hledané neznámé koeficienty. Tento postup v podstatně jednodušší verzi naznačil již Monastyršin [1]. Takto získané koeficienty však neodpovídají minimu funkce, sumy kvadrátů reziduí, $\mathbf{r}^H \mathbf{r}$, ale $\mathbf{r}^H \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{r}$, kde \mathbf{W} je matice neznámých vah měření o prvcích w_k a exponent H hermitovskou transpozici. Mohou proto sloužit jen za první přiblížení skutečným koeficientům.

Neznámou váhu w_k můžeme zčásti kompenzovat v iteracích, dělíme-li v l +první iteraci celou rovnici vahou $w_k^{(l+1)} = \sum_{j=0}^n a_j^{(l)} p_k^j$. Pokud bude iterační proces konvergovat, bude se $w_k/w_k^{(l+1)}$ blížit k jedničce a potom

$$\underbrace{\frac{w_k}{w_k^{(l+1)}}}_{\approx 1} r_k^{(l+1)} = G(p_k) \underbrace{\frac{w_k}{w_k^{(l+1)}}}_{\approx 1} - \underbrace{\frac{1}{w_k^{(l+1)}} \sum_{j=0}^m b_j^{(l+1)} p_k^j}_{\approx G_m(p_k)} \quad (8)$$

se bude blížit skutečné chybě náhrady k -tého měření.

Výhodou této metody je obvykle velmi rychlá konvergence. Při tom se pro optimalizaci vystačí s pseudoinverzí. Její nevýhodou však je, že nalezené koeficienty a_j a b_j nemusí být fyzikálně realizovatelné, a že jim odpovídající matematický model nemusí být stabilní. Příčinou tohoto stavu mohou být velké měřicí chyby a čistě geometrický přístup k nim bez omezení kladených na koeficienty.

2.2 Nelineární regrese

Aby výsledný matematický (regresní, zidentifikovaný) model byl stabilní, je zapotřebí klást na jeho koeficienty jisté požadavky. To však nebylo dobře možné v linearizovaném případě. Problém identifikace lze však řešit i jako optimalizační úlohu s omezeními. Za tím účelem postavme poněkud modifikovaný model, který vyplyne z rovnice (1) po rozkladu čitatele i jmenovatele v součin trojčlenů

$$G_m(p) = G_m(0) \prod_{j=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{1 + c_j p + d_j p^2}{1 + a_j p + b_j p^2}, \quad (9)$$

kde $G_m(0)$ je hodnota frekvenčního přenosu při nulové budící frekvenci, a kde některé z koeficientů a_j , b_j , c_j , d_j (rozdílných od předešlé metody) jsou případně známé (např. nulové). Pak pro chybu náhrady r_k při i -té budící frekvenci lze psát

$$G_m(p_k) - G(p_k) = r_k. \quad (10)$$

Pro všechny budící frekvence se z reziduí sestaví vektor-sloupec \mathbf{r} . Omezíme-li se na řešení optimální ve smyslu nejmenších čtverců, mohli bychom za kritériální (cílovou) funkci, kterou budeme minimalizovat, zvolit

$$S_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \mathbf{r}^H \mathbf{r}, \quad (11)$$

kteřá by bez dalších podmínek mohla vést také k nestabilním systémům. Je však známo, že stabilní systémy mají koeficienty a_j a b_j , ovlivňující polohu a „mohutnost“ pólů (vlastní čísla), kladné. Stejně podmínky můžeme klást na koeficienty c_j a d_j ovlivňující polohu nul. Potom je účelné zavést za neznámé koeficienty kvadráty nových neznámých totiž $a_j = \alpha_j^2$, $b_j = \beta_j^2$, $c_j = \gamma_j^2$, $d_j = \delta_j^2$ a postavit novou cílovou funkci

$$S_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{r}^H \mathbf{r}. \quad (12)$$

Takto zidentifikované systémy jsou již stabilní.

3 Přímá identifikace MIMO systémů [2]

Chování lineárního diskrétního dynamického systému s mnoha vstupy a mnoha výstupy v čase lze popsat soustavou obyčejných lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu. Tak např. diferenciální rovnice

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (13)$$

s maticí hmot \mathbf{M} , maticí koeficientů útlumu \mathbf{B} , maticí tuhostí \mathbf{K} , vektorem buzení \mathbf{f} a vektorem odezev \mathbf{q} popisuje pohyb lineární diskrétní mechanické soustavy. Po Fourierově transformaci této rovnice s nulovými počátečními podmínkami dostaneme pro $p = i2\pi f$ rovnici

$$\underbrace{[p^2 \mathbf{M} + p \mathbf{B} + \mathbf{K}]}_{\mathbf{Z}(p)} \mathbf{q}(p) = \mathbf{f}(p), \quad (14)$$

v níž $\mathbf{f}(p)$ je vektor Fourierových obrazů budících sil, $\mathbf{q}(p)$ vektor obrazů buzení a $\mathbf{Z}(p)$ maticí dynamických tuhostí. Matice k ní inverzní,

$$\mathbf{G}(p) = \mathbf{Z}^{-1}(p), \quad (15)$$

kteřou lze relativně snadno měřit, se nazývá maticí frekvenčních přenosů nebo frekvenčních odezev, anebo i maticí dynamických poddajností. Rovnost ze vztahu (15) lze využít k odvození dvou přímých metod.

3.1 Součinnová metoda

Tato metoda je založena na vzájemné inverznosti matic dynamických poddajností a tuhostí. Z této podmínky pro měřené $\mathbf{G}(p)$ a hledané $\mathbf{Z}(p)$ plyne

$$\mathbf{G}(p) \mathbf{Z}(p) = \mathbf{I} + \mathbf{R}(p), \quad (16)$$

kde $\mathbf{R}(p)$ je matice reziduí. Rozepíšeme-li poslední rovnici pro k -tou budící frekvenci f_k , dostaneme

$$[p_k^2 \mathbf{G}(p_k), p_k \mathbf{G}(p_k), \mathbf{G}(p_k)] \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} \doteq \mathbf{I}, \quad (17)$$

kteřou pro všechny měřené frekvence f_k , $k = 1, \dots, K$ můžeme zapsat ve tvaru

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p_1^2 \mathbf{G}(p_1) & p_1 \mathbf{G}(p_1) & \mathbf{G}(p_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_K^2 \mathbf{G}(p_K) & p_K \mathbf{G}(p_K) & \mathbf{G}(p_K) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \doteq \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \vdots \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}}. \quad (18)$$

Matice \mathbf{A} soustavy je obvykle obdélníková, a proto přibližné řešení ve smyslu metody nejmenších čtverců má tvar:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^+ \mathbf{Y}. \quad (19)$$

3.2 Rozdílová metoda

Tato rovněž přímá metoda je založena na faktu, že

$$\mathbf{Z}(p) - \mathbf{G}^{-1}(p) = \mathbf{R}(p). \quad (20)$$

Podobným postupem jako u součinnové metody dostaneme maticovou rovnici pro k -tou frekvenci

$$[p_k^2 \mathbf{I}, p_k \mathbf{I}, \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} \doteq \mathbf{G}^{-1}(p_k). \quad (21)$$

Pro všechny měřené frekvence dostane rovnice nový tvar

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p_1^2 \mathbf{I} & p_1 \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{I} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_K^2 \mathbf{I} & p_K \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \doteq \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{G}^{-1}(p_1) \\ \vdots \\ \mathbf{G}^{-1}(p_K) \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}} \quad (22)$$

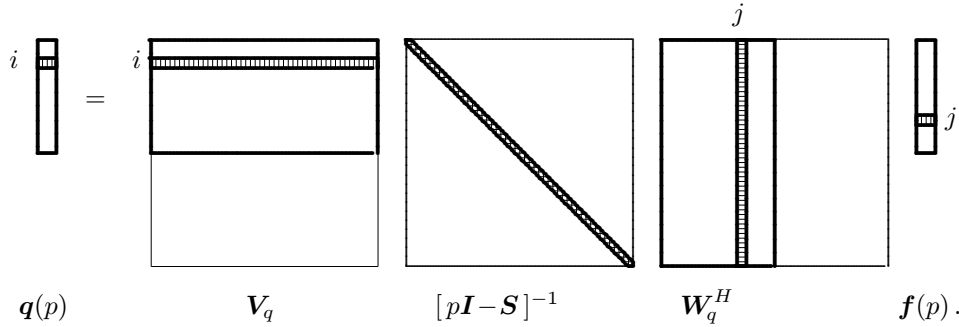
se stejným řešením (19) jako v případě součinné metody.

4 Nepřímá identifikace SISO systémů

Jde o častou úlohu, při níž máme z měřeného frekvenčního přenosu určit vlastní čísla pozorovaného objektu a jeho citlivost na dané buzení. Je známo, že obrazy odezvy jsou závislé na obrazech buzení podle vztahu

$$\mathbf{q}(p) = \underbrace{\mathbf{V}_q [p\mathbf{I} - \mathbf{S}]^{-1} \mathbf{W}_q^H}_{\mathbf{G}(p)} \mathbf{f}(p), \quad (23)$$

v němž \mathbf{S} je spektrální matice, na jejíž diagonále leží vlastní čísla matematického modelu a \mathbf{V}_q a \mathbf{W}_q jsou výchylkové submatice modálních matic \mathbf{V} a \mathbf{W} . Pozorujeme-li objekt pouze v místě i při buzení v místě j , nastane situace vyjádřená následujícím schématem:



Již z něj je patrné, že odezva bude obsahovat příspěvky všech tvarů kmitu, protože se v ní uplatní celá diagonální matice s póly. Označíme-li vektor-řádku matice symbolem transpozice, můžeme odezvu $q_i(p)$ zapsat také jako

$$\begin{aligned} q_i(p) &= \mathbf{v}_i^T [p\mathbf{I} - \mathbf{S}]^{-1} (\mathbf{w}_j^T)^H \\ &= f_j(p) \sum_{\nu=1}^{2n} \frac{v_{i\nu} w_{j\nu}^C}{p - s_\nu} = f_j(p) \sum_{\nu=1}^{2n} \frac{a_{ij\nu}}{p - s_\nu}. \end{aligned} \quad (24)$$

Je-li buzení harmonické o jednotkové mohutnosti, představuje suma v této rovnici (ij)-tý prvek $g_{ij}(p)$ matice frekvenčních přenosů $\mathbf{G}(p)$. Objekt potom identifikujeme nalezením vlastních čísel s_ν a jim odpovídajících citlivostí $a_{ij\nu}$. Při identifikaci vycházíme z dílčího frekvenčního přenosu $g_{ij}(p)$ měřeného ve frekvenčním intervalu pokrývajícím vlastní čísla o indexech ν_a až ν_b podle vztahu

$$g_{ij}(p) \doteq \sum_{\nu=\nu_a-1}^{\nu_b+1} \frac{a_{ij\nu}}{p - s_\nu}. \quad (25)$$

Pro nalezení neznámých s_ν a $a_{ij\nu}$ použil Kozánek [3] stabilizovanou Newtonovu-Raphsonovu metodu pro minimalizaci sumy kvadrátů reziduí

$$r_{ij}(p_k) = \sum_{\nu=\nu_a-1}^{\nu_b+1} \frac{a_{ij\nu}}{p_k - s_\nu} - g_{ij}(p_k). \quad (26)$$

Formule ukazují, že budeme identifikovat o dvě vlastní čísla více, než byla v měřeném intervalu. Důvodem je potřeba korigovat příspěvky vlastních frekvencí, ležících vně měřeného frekvenčního intervalu.

Vektory neznámých regresních koeficientů jsou

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}, \text{ kde } \mathbf{s} = [s_\nu] \text{ a } \mathbf{a} = [a_{ij\nu}], \nu = \nu_a - 1, \dots, \nu_b + 1. \quad (27)$$

Gradientní metody optimalizace potřebují Jacobiovu matici $\mathbf{J} = \partial \mathbf{r} / \partial \mathbf{c}$, která má řádky odpovídající k -té měřené frekvenci

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \frac{a_{ij\nu}}{(p_k - s_\nu)^2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{p_k - s_\nu} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Je zřejmé, že pro výpočet matice \mathbf{J} je zapotřebí znát dobré odhady neznámých parametrů \mathbf{c} . Za předpokladu, že jsou vlastní čísla dobře separovaná, lze s_ν a $a_{ij\nu}$ odhadnout z průběhu frekvenčního přenosu v okolí rezonancí. Je-li v okolí ν -té rezonance při respektování ostatních vlastních čísel posunutím počátku o g_ν frekvenční přenos

$$g(p) \doteq \frac{a_\nu}{p - s_\nu} + g_\nu \quad \implies \quad p = s_\nu + \frac{a_\nu}{g(p)} + \frac{p - s_\nu}{g(p)} g_\nu, \quad (29)$$

potom pro odhady \hat{s}_ν a \hat{a}_ν vlastního čísla s_ν a citlivosti a_ν platí

$$p_k \doteq \left[1, \frac{1}{g(p_k)}, \frac{p_k - s_\nu}{g(p_k)} \right] \begin{bmatrix} \hat{s}_\nu \\ \hat{a}_\nu \\ \hat{g}_\nu \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Zvolíme-li frekvenci p_m maximálního modulu frekvenčního přenosu za střední z pětice měření, můžeme koeficienty \hat{s}_ν , \hat{a}_ν a \hat{g}_ν určit pomocí pseudoinverze jako

$$\begin{bmatrix} \hat{s}_\nu \\ \hat{a}_\nu \\ \hat{g}_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & \frac{1}{g(p_{m-2})}, & \frac{p_{m-2} - s_\nu}{g(p_{m-2})} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1, & \frac{1}{g(p_{m+2})}, & \frac{p_{m+2} - s_\nu}{g(p_{m+2})} \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} p_{m-2} \\ \vdots \\ p_{m+2} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Za zatím neznámé vlastní číslo s_ν ve třetím sloupci pseudoinvertované matice lze zprvu použít pouze jeho hrubý odhad p_m z budící frekvence f_m příslušející rezonančnímu vrcholu. Ten pak lze dále zpřesnit pomocí právě nalezeného \hat{s}_ν . Fiktivní (korekční) vlastní čísla odhadujeme stejným způsobem, avšak tentokrát z krajních pěti (tří) bodů měření. Nakonec proběhne cyklus iterací (l), v nichž se zpřesňuje předchozí odhad $\mathbf{c}^{(l)}$ na

$$\mathbf{c}^{(l+1)} = \mathbf{c}^{(l)} - \mathbf{J}^+ \mathbf{r}^{(l)}. \quad (32)$$

Poznámka:

Jacobiovu matici lze relativně snadno zkonstruovat za pomoci matice \mathbf{A}_1 o tvaru

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1 - s_{\nu_{a-1}}}, & \cdots, & \frac{1}{p_1 - s_{\nu_{b+1}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{p_K - s_{\nu_{a-1}}}, & \cdots, & \frac{1}{p_K - s_{\nu_{b+1}}} \end{bmatrix} \quad (33)$$

a z ní odvozené matice \mathbf{A}_2 , která má za prvky kvadráty prvků matice \mathbf{A}_1 . Potom

$$\mathbf{J} = [\mathbf{A}_2 \text{diag}(\mathbf{a}), \mathbf{A}_1]. \quad (34)$$

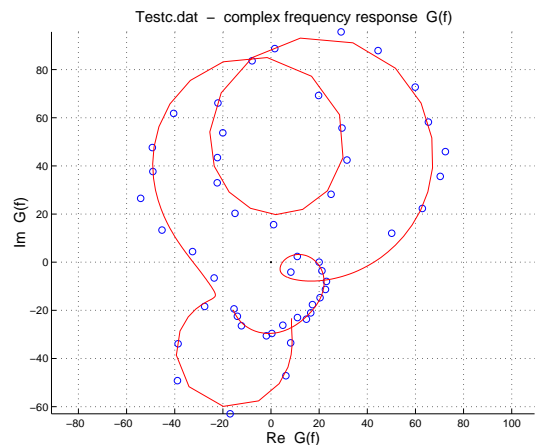
Kromě toho navíc vektor aproximací hodnot frekvenčních přenosů zjištěných při všech budících frekvencích \mathbf{p} bude

$$\mathbf{g}_{ij}(\mathbf{p}) = \mathbf{A}_1 \mathbf{a}. \quad (35)$$

4.1 Příklad

Na vedlejším obrázku je výsledek identifikace mechanického systému z měřeného frekvenčního přenosu.

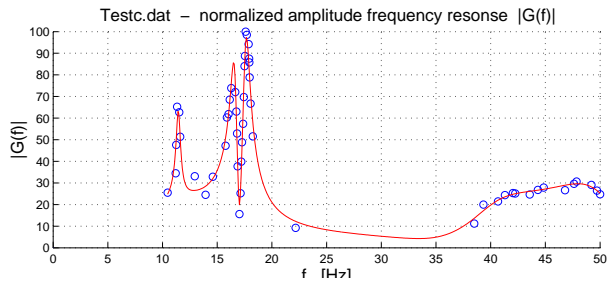
Dále je uveden program v jazyku MATLAB, který identifikuje SISO systém. Popis vstupních i výstupních parametrů je uveden v záhlaví M-funkcí. Funkce `inp.m`, `fig.m` a `loadmx.m` byly prezentovány již dříve [7]. Je vhodné si povšimnout, jakým způsobem byla vytvořena již zmíněná matice \mathbf{A}_1 v modulu `IdeSISO.m`.



Obr. 2. Identifikace SISO systému

```
>> ident
      file = Testc.dat =>
      scalex(x_1) -> f [Hz] = 1/60 =>
      scale(x_{2,3}) = ones(size(f)) =>
      weight = f =>
      f_o = -1.0000 =>
```

k	Re s	Im s	Re f	Im f	Q
1	-1.33	71.94	11.45	-0.21	27.14
2	-18.24	70.53	11.22	-2.90	2.00
3	-2.05	104.57	16.64	-0.33	25.55
4	-2.28	110.53	17.59	-0.36	24.20
5	-22.37	251.90	40.09	-3.56	5.65
6	-19.84	315.03	50.14	-3.16	7.96
7	-32.15	314.88	50.12	-5.12	4.92



Obr. 3. Identifikovaná $|G(f)|$

Identifikace náhodně vybraného měřeného frekvenčního přenosu mechanické soustavy se uskutečnil dále uvedeným programem. Vlastní identifikaci zajišťuje M-funkce `ideSISO.m`, která po nalezení počátečních odhadů volá funkci `lsqnonlin` z Optimization Toolboxu.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ident.M
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
close all

file = inp('file','Testc.dat');
x = loadmx(file);

sclf = eval(inp('scalex(x_1) -> f [Hz]', '1/60'));
f = x(:,1)*sclf;

sclx = eval(inp('scale(x_{2,3}', 'ones(size(f))'));
g = (x(:,2)+i*x(:,3)).*sclx;
g = 100/max(abs(g))*g;

wght = eval(inp('weight','f'));
pk = inp('f_o',-1);
if length(pk)>1 | pk>0, pk=pk*sclf; end

[go,s,a,ho,ns,output] = ideSISO(g,f,pk,wght);
%-----
df = (f(end)-f(1))/500;
ff = (f(1):df:f(end))';
N = length(ff);
Gf = 1./(i*diag(2*pi*ff)*ones(N,ns) - ones(N,ns)*diag(s))*a + ho;

fig(8);
hold on;
plot(0,0)
plot(f,abs(g),'o', ff,abs(Gf),'r')
grid
xlabel('f [Hz]','FontSize',14)
ylabel('|G(f)|','FontSize',14)
title([file ' - normalized amplitude frequency response |G(f)|'],'FontSize',14)

fig(4);
axis('equal')
hold on;
plot(0,0);
plot(0,0,'k')
plot(Gf,'-r'); grid;
xlabel('Re G(f)','FontSize',14)
ylabel('Im G(f)','FontSize',14)
title([file ' - complex frequency response G(f)'],'FontSize',14)

s = sort(s);
Q = abs(s)./(-2*real(s));
fprintf('\n k      Re s      Im s      Re f      Im f      Q\n')
for k = 1:ns
    fprintf('\n%2d %8.2f %8.2f %8.2f %7.2f %7.2f',...
        k, real(s(k)), imag(s(k)), imag(s(k))/2/pi, real(s(k))/2/pi, Q(k));
end

%=====

function [f,J] = FunJ(x,wght)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
global go om N ns ia

A = 1./(i*diag(om)*ones(N,ns)-ones(N,ns)*diag(x(1:ns)));
J = [A.^2*diag(x(ia)), A, ones(size(om))].*(wght*ones(1,2*ns+1)); % Jacobian matrix
f = (A*x(ia)-go+x(end)).*wght; % vector of weighted residuals
```

```

%=====
%
% IDESISO.M      Evaluation of eigenvalues, power factors and
% ~~~~~
% correction terms
%
% [go,s,a,ho,ns,output] = ideSISO(g,f,K,wght)
% ~~~~~
%
%      g      column vector of frequency response G(f) samples
%      f      column vector of excitation frequencies [Hz]
%      ep     scalar <0 peak tolerance, >0 subscript of a single peak
%            vector = subscripts of peaks within interval of f
%      wght   column vector of measurement weights
%
%      go     identified frequency response
%      s      vector-column s(i) of eigenvalues
%      a      vector-column a(i) of participation factors
%      ho     scalar, correction of the coordinate origin position
%      ns     number of eigenvalues
%      output information about the optimization

function [go,s,a,ho,ns,output] = ideSISO(g,f,ep,wght)
%~~~~~
global go om N ns ia

go = g;          %      samples of frequency response G(f)
om = 2*pi*f;    %      excitation frequency omega
N = length(g);  %      number of samples of G(f)
if length(ep)==1 & ep<0 % seek peaks?
    [X,I,K] = peaks(abs(g),-ep);
else
    I = zeros(size(ep));
    for k = 1:length(ep)
        df = f-ep(k);
        for j=1:N
            if df(j)>0, break, end
        end
        I(k) = j;
        if abs(df(j-1))<df(j), I(k)=I(k)-1; end
    end
end
I = [1 I N]; %      positions of peaks & borders
ns = length(I); %      number of peaks
ia = ns+1:2*ns;
x = zeros(ns,1);
if nargin<4, wght = ones(N,1); end
%
%      Initial estimate of eigenvalues s(n):
for n = 1:ns
    j = I(n)-2;
    if j<1, j = 1;
    elseif j>N-4, j = N-4;
    end
    k = j+4;
    p = [ones(5,1), 1./g(j:k), i*(om(j:k)-om(j+2))./g(j:k)]\om(j:k);
    p = [ones(5,1), 1./g(j:k), i*(om(j:k)-p(1))./g(j:k)]\om(j:k);
    x(n) = i*p(1); %      eigenvalue estimate
end
x = -abs(real(x))+i*imag(x);
A = 1./(i*diag(om)*ones(N,ns)-ones(N,ns)*diag(x(1:ns)));
x = [x; A\g; 0]; %      initial estimates of s(n) & a(n)

dom = 0.1*om(N);
lb = zeros(ns,1)-dom;
ub = ones(ns,1)*om(N)+dom;
options = optimset('Jacobian','on', 'disp','none');

[x,resnorm,residual,flg,output] = lsqnonlin('FunJ',x,lb,ub,options,wght);
%~~~~~

s = x(1:ns); %      eigenvalues
a = x(ia); %      participation factors
ho = x(end); %      origin correction
s = -abs(real(s))+i*imag(s);
ns = length(s);
go = 1./(i*diag(om)*ones(N,ns) - ones(N,ns)*diag(s))*a + ho;

%=====
%
% PEAKS.M      Finds peaks of |G|
% ~~~~~
%      G      columns of G(f)
%      Tol   peak tolerance
%

```

```

% X   row of peak values
% I   row of indeces of all sum(abs(G)) peaks
% K   row of indeces of sum(abs(G)) peaks > tol*abs(G)
% N   lenghtG of time series

function [X,I,K,N] = peaks(G,tol)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

[N,mn] = size(G);
if mn==1,
    aG = abs(G(:)); %           Column
else
    aG = sum(abs(G.'.')); %     Columns
end
G(2:N-1) = (aG(1:N-2)+3*aG(2:N-1)+aG(3:N))/5;
I = 1:N;
I = I(G(2:N-1)>G(1:N-2) & G(2:N-1)>G(3:N))+1;
G = -G;
J = 1:N;
J = J(G(2:N-1)>G(1:N-2) & G(2:N-1)>G(3:N))+1;
G = -G;
if G(2)>G(1), J=[1 J]; end
if G(N-1)>G(N), J=[J N]; end
ij = min(length(I),length(J));
K = 1:N;
K = K(max(abs((G(I(1:ij))-G(J(1:ij)))/G(I(1:ij))), ...
    abs((G(I(1:ij))-G(J(2:ij+1)))/G(I(1:ij))))>tol);
K = I(K);
X = G(K);

```

5 Nepřímá identifikace MIMO systémů

Identifikace systémů s mnoha vstupy a mnoha výstupy je mnohem složitější problém než u systémů s jedním vstupem a jedním výstupem. Budí se i měří ve více místech a to buď současně nebo i v etapách po sobě. Zpracováním experimentálních dat se má získat jedna spektrální matice \mathbf{S} a dvě matice modální \mathbf{V} a \mathbf{W} . Existuje řada metod, které lze najít v literatuře (viz např. [4], [5]). Uvedme zde jednu relativně novou kompaktní metodu, která na rozdíl od dosud probíraných, pracujících na frekvenční oblasti, je založena na analýze matice impulzních odezev, tedy na informaci z časové oblasti. Jak bylo řečeno výše, je matice impulzních odezev $\mathbf{G}(t)$ originálem k matici frekvenčních přenosů $\mathbf{G}(p)$.

Obvyklým výstupem z dynamických experimentů bývá serie matic frekvenčních přenosů (dynamických poddajností) $\mathbf{G}(p) \in \mathcal{C}^{m,n}$. Ty lze získat nejrůznějšími technikami měření odezev objektu v m místech na libovolné buzení působící na objekt v n bodech. Není rozhodující, zda bylo harmonické, impulzní, přechodové nebo náhodné, anebo zda bylo aplikováno postupně v jednotlivých bodech konstrukce, anebo současně v případě náhodného buzení.

Matice frekvenčních přenosů lze vyjádřit dvěma způsoby:

$$\mathbf{G}(p) = [p^2\mathbf{M} + p\mathbf{B} + \mathbf{K}]^{-1} = \mathbf{V} [p\mathbf{I} - \mathbf{S}]^{-1} \mathbf{W}^H, \quad (36)$$

kde modální matice \mathbf{V} a $\mathbf{W} \in \mathcal{C}^{m^*,2m^*}$ obsahují vlastní vektory výchylek, a spektrální matice $\mathbf{S} \in \mathcal{C}^{2m^*,2m^*}$ vlastní čísla na diagonále. Z matice $\mathbf{G}(p)$ lze zpětnou Fourierovou transformací získat matici impulzních odezev

$$\mathbf{G}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(p) e^{+pt} df = \mathbf{V} \exp(\mathbf{S}t) \mathbf{W}^H. \quad (37)$$

Protože výsledkem experimentu nejsou spojité funkce, ale časové, příp. frekvenční řady závislé na vzorkovací periodě T , nahraňuje se obyčejná Fourierova transformace její diskrétní konečnou verzí (DFT, IDFT). Ať výsledkem experimentu je časová řada matic impulzních odezev odebraných s pevnou periodou vzorkování T o tvaru

$$\mathbf{G}(kT) = \mathbf{V} \exp(k\mathbf{S}T) \mathbf{W}^H, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (38)$$

kde N je celkový počet submatic $\mathbf{G}(kT)$, tedy i vzorků v každém prvku této maticové časové řady.

5.1 Vlastní čísla

Odezva $\mathbf{q}(t)$ na libovolné buzení $\mathbf{f}(t)$ je konvolucí impulzní odezvy $\mathbf{G}(t)$ s $\mathbf{f}(t)$, tedy

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{G}(t) * \mathbf{f}(t) = \int_0^t \mathbf{G}(\tau) \mathbf{f}(t-\tau) d\tau = \int_0^t \mathbf{G}(t-\tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau. \quad (39)$$

V diskrétní verzi lze odezvu soustavy vyjádřit s využitím posledního vztahu jako

$$\mathbf{q}(kT) = T \sum_{\kappa=0}^k \mathbf{G}((k-\kappa)T) \mathbf{f}(\kappa T) = T\mathbf{V} \sum_{\kappa=0}^k \exp((k-\kappa)\mathbf{S}T) \mathbf{W}^H \mathbf{f}(\kappa T). \quad (40)$$

Pokud bychom použili postupně n libovolných nezávislých buzení v n vybraných bodech objektu, dostali bychom maticovou časovou řadu buzení $\mathbf{F}(\kappa T) \in \mathcal{R}^{n,n}$ a jí odpovídající maticovou časovou řadu odezev $\mathbf{Q}(kT) \in \mathcal{R}^{m,n}$:

$$\mathbf{Q}(kT) = T \sum_{\kappa=0}^k \mathbf{G}((k-\kappa)T) \mathbf{F}(\kappa T) = TV \sum_{\kappa=0}^k \exp((k-\kappa)ST) \mathbf{W}^H \mathbf{F}(\kappa T). \quad (41)$$

Předpokládejme nyní, že za buzení byly užity Diracovy impulzy. V diskrétním modelu to znamená, že $\mathbf{F}(0) = \mathbf{I}_n$ a $\mathbf{F}(\kappa T) = \mathbf{O}_n$ pro $\kappa > 0$.

Hledejme nyní taková buzení $\mathbf{F}(\kappa T)$, všechna řádu n , která budou schopna systém vybuzený v čase $t=0$ serií impulzů $\mathbf{F}(0) = \mathbf{I}_n$ uvést do klidu v následujících p vzorkovacích periodách, tedy způsobit, že odezva na počáteční impulzy $\mathbf{F}(0)$ bude po následujícím fiktivním buzení $\mathbf{F}(\kappa T)$, $\kappa=1, \dots, p$, již nulová, t.j. že $\mathbf{Q}(kT) = \mathbf{O}_{m,n}$ pro $k=p, p+1, \dots$. Teoreticky by pro mechanickou soustavu popsanou rov. (13) mohlo být $p=2$, pokud by se buzení aplikovalo ve všech stupních volnosti a systém byl říditelný. Protože každému stupni volnosti patří jedna vlastní frekvence a té pak dvě vlastní čísla, lze minimální počet period pro zastavení rozkmitaného systému stanovit jako

$$p \geq \frac{2n_f}{n} = \frac{n_e}{n}, \quad (42)$$

kde n_f je počet vlastních frekvencí v pozorovaném frekvenčním pásmu a n_e jim odpovídající počet vlastních čísel. Rozepíšeme-li podmínku pro $\mathbf{Q}(kT) = \mathbf{O}_{m,n}$ pro $k=p, p+1, \dots$, dostaneme systém rovnic, v němž $\mathbf{G}_k = \mathbf{G}(kT)$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{p+1} & \mathbf{G}_p & \cdots & \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_{p+2} & \mathbf{G}_{p+1} & \cdots & \mathbf{G}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{G}_{N-1} & \mathbf{G}_{N-2} & \cdots & \mathbf{G}_{N-p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{F}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{m,n} \\ \mathbf{O}_{m,n} \\ \vdots \\ \mathbf{O}_{m,n} \end{bmatrix}, \quad (43)$$

ze kterého lze již snadno vypočítat matice zatím neznámého fiktivního buzení $\mathbf{F}_\kappa = \mathbf{F}(\kappa T)$, $\kappa=1, \dots, p$ jako

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_p & \mathbf{G}_{p-1} & \cdots & \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_{p+1} & \mathbf{G}_p & \cdots & \mathbf{G}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{G}_{N-2} & \mathbf{G}_{N-3} & \cdots & \mathbf{G}_{N-p-1} \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{p+1} \\ \mathbf{G}_{p+2} \\ \vdots \\ \mathbf{G}_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (44)$$

kde symbol „+“ u obdélníkové matice vyznačuje pseudoinverzi.

Z druhé části transponované rovnice (41) vyplývá, že pro vynulované odezvy od periody $p+1$ lze s využitím diagonálnosti matice \mathbf{S} také psát

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{F}_1^T & \mathbf{F}_2^T & \cdots & \mathbf{F}_p^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W} \exp((p+1)ST) \\ \mathbf{W} \exp(pST) \\ \vdots \\ \mathbf{W} \exp(ST) \end{bmatrix} = \mathbf{O}_n. \quad (45)$$

Při tom jsme mlčky vynásobili celou rovnici zleva regulární maticí \mathbf{V}^+/T . Zavedeme-li pro submatice neznámých symboly

$$\mathbf{E}_k = \mathbf{W} \exp(kST), \quad (46)$$

můžeme rovnici (45) přepsat do tvaru

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{F}_1^T & -\mathbf{F}_2^T & \cdots & -\mathbf{F}_{p-1}^T & -\mathbf{F}_p^T \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{O}_n & & & \\ \mathbf{O}_n & \mathbf{I}_n & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{O}_n & \mathbf{O}_n & & \mathbf{I}_n & \mathbf{O}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_p \\ \mathbf{E}_{p-1} \\ \vdots \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{p+1} \\ \mathbf{E}_p \\ \vdots \\ \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Protože ze všech submatic \mathbf{E}_k na pravé straně lze vytknout $\exp(ST)$ a tedy psát

$$\mathbf{E}_{k+1} = \mathbf{E}_k \exp(ST), \quad (48)$$

lze i systém rovnic (47) zapsat zkráceně jako problém vlastních hodnot \mathbf{Z} a jim odpovídajících vlastních vektorů \mathbf{E} :

$$\mathbf{A}\mathbf{E} = \mathbf{E}\mathbf{Z}. \quad (49)$$

Matice vlastních čísel $\mathbf{Z} = \exp(\tilde{\mathbf{S}}T)$ nemusí být stejného řádu jako \mathbf{S} , ale bude při vyšším p , než je nezbytně nutné, obsahovat ještě doplňková vlastní čísla nesouvisející s identifikovaným systémem. Stejně platí o matici vlastních vektorů. Po jeho vyřešení určíme z prvních $n_e = 2n_f$ uspořádaných vlastních hodnot z matice \mathbf{Z} spektrální matici \mathbf{S} původní úlohy identifikovaného systému s využitím rovnice (48) jako

$$\mathbf{S} = f_s \ln \mathbf{Z}. \quad (50)$$

Přesnost odhadu spektrální matice \mathbf{S} je u přesných dat tím větší, čím větší je hodnota parametru p , ovšem za cenu paměťových nároků rostoucích s p kvadraticky a výpočetního času narůstajícího s p kubicky. Pro data zatížená chybami je však účelné udržovat p co nejnižší, aby se snížilo nebezpečí nalezení nepravých vlastních frekvencí.

5.2 Modální matice

Nejsnáze se vypočte **levostranná** modální matice \mathbf{W} , které se v hermitovskuy transponované formě někdy říká matice participačních faktorů \mathbf{L} . Název vystihuje její účinek na příspěvek určitých souřadnic vektoru $\mathbf{f}(t)$ k jednotlivým tvarům kmitu. Modální matici \mathbf{W} vypočteme z rovnice (46) jako

$$\mathbf{W} = \mathbf{E}_p [\exp(p\mathbf{S}T)]^+. \quad (51)$$

Výpočet **pravostranné** modální matice \mathbf{V} lze realizovat různými způsoby. Zatímco při použití metody LSFD popsané v belgickém prameni [5] a užití v Peškově práci [6] se přechází do frekvenční oblasti, v proceduře Gt2SVW zpracované rovněž v MATLABu se i pro odhad pravostranné modální matice zůstává v časové oblasti (viz [8] nebo www.cdm.cas.cz). Za tím účelem se z rovnice (38) vytvoří pro $k = 0, 1, \dots, N-1$ přeurčený systém algebraických rovnic, ze kterého se získá řešení ve smyslu metody nejmenších čtverců ve tvaru

$$\mathbf{V} = [\mathbf{G}(kT)] [\exp(k\mathbf{S}T) \mathbf{W}^H]^+, \quad (52)$$

v němž výrazy v hranatých závorkách jsou obdelníkové matice vzniklé při k probíhajícím již zmíněný interval. Je snad vhodné zde upozornit, že identifikované modální matice jsou submaticemi úplných modálních matic, protože $\mathbf{V} \in \mathcal{C}^{m,n_e}$ a $\mathbf{W} \in \mathcal{C}^{n,n_e}$. Pokud by se měly určit celé modální matice, bylo by zapotřebí budít i měřit ve všech stupních volnosti.

6 Závěr

Příspěvek je věnován metodám identifikace lineárních diskrétních dynamických soustav. Uvádí jak metody přímé identifikace, které hledají koeficienty diferenciálních rovnic, tak i nepřímé určené k získávání spektrálně-modálních charakteristik. Vedle teoretických základů je prezentován i matlabovský program pro identifikaci SISO systémů.

Tento příspěvek byl vypracován za finanční podpory MŠMT v rámci projektu výzkumu a vývoje LN00B084.

Literatura

- [1] Monastyřin G. J.: Obrabotka eksperimentalnyh častotnyh charakteristik. Avtomatika i telemekhanika, 21, 1960, č.3, 422-428
- [2] Balda M.: Identifikace a zpracování měření mechanických soustav. Část II. Výzk. zpráva ŠKODA ÚVZÚ, Sz 3994 V, Plzeň, 1977
- [3] Kozánek J.: Vyhodnocení přenosové funkce z naměřených dat. Strojnícky časopis, 33, 1982, č. 3, 281-288
- [4] Daněk O.: Identifikační metody v dynamice strojů. Strojnícky časopis, 48, 1997, č.5, 297-314
- [5] Heylen W., Lammens S., Sas P.: Modal analysis theory and testing Katholieke Universiteit Leuven, Belgie, 1994
- [6] Pešek L.: Polyreferenční identifikace mechanických systémů v časové oblasti. Kolokvium „Diagnostika a aktivní řízení '98“, Brno, 1998, 99-104
- [7] Balda M.: Užitečné funkce pro MATLAB. Sborník 8. konference MATLAB 2000, Humusoft, Praha, 2000, ISBN 80-7080-401-7, s. 27-34
- [8] Balda M.: Identifikace MIMO systémů z impulzních odezev. Sb. konf. ZČU FAV KME „Výpočtová mechanika '99“, Nečtiny, 1999, ISBN 80-7072-542-1 s. 19-26