

# STABILIZACE NELINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ: MODEL MAGNETICKÉ LEVITACE

*P. Hotmar, J. Kukal*

Ústav počítačové a řídicí techniky, VŠCHT Praha

## **Abstrakt:**

Príspevek se zabývá problematikou nelineárního řízení a stabilizací nelineárního, nestabilního systému, s konkrétní aplikací navržené metodiky na modelu magnetické levitace v systému Matlab/Simulink. Je podán ucelený přehled možností analýzy a syntézy řízení nelineárních systémů a dále podrobněji zkoumána stabilizace aplikačního modelu s využitím klasické linearizace, exaktní linearizace a Ljapunovovy teorie.

## **I. Úvod**

Na úvod si připomeňme základní motivy, které nás vedou k využití možností nelineárního řízení. Lineární aproximace, spoléhající na řadu zjednodušujících předpokladů, umožňují nasazením jednoduchého, propracovaného a uzavřeného aparátu řešit s variabilně velkou újmou na obecnosti celou řadu problémů. V dnešní době pokročilé výpočetní techniky však již můžeme tuto újmu, na úkor nárůstu složitosti matematických disciplín a s tím související výpočetní náročnosti, prostřednictvím nelineárního řízení minimalizovat a postihnout tak nelineární podstatu reálného světa vytvářením přesnějších modelů zohledňujících velké pracovní rozsahy, nespojitosti, parazitní nelinearity a parametrické nejistoty. Výsledkem specifických rozšíření či zobecnění lineárních metod sloužících k řízení složitých systémů s vysokým stupněm nelinearity tak většinou je nákladné a dlouhé vývojové období na jehož konci stojí řídicí algoritmus s minimální stabilitou a efektivitou.

Nelineární systémy vykazují vzhledem ke svým lineárním protějškům řadu specifických rysů, mezi jinými neplatnost principu superpozice, existenci více rovnovážných stavů, včetně limitních cyklů (samobuzených kmitů) a chaotického chování, závislost počátečních podmínek na vstupním signálu, bifurkace, strukturální nestabilitu, a především absenci univerzální metodiky pro analýzu a syntézu řízení.

## **II. Analýza a syntéza řízení**

Mezi klasické metody analýzy nelineárních systémů patří především:

- a) kvalitativní analýza pomocí fázových portrétů, generující ve stavovém prostoru dynamického systému druhého řádu pohybové trajektorie odpovídající různým počátečním podmínkám a umožňující následné zkoumání kvalitativních rysů těchto trajektorií,
- b) ekvivalentní přenosy aproximující nelineární prvky jejich lineárními ekvivalenty a umožňující následnou analýzu vzniklých systémů ve frekvenční oblasti, a
- c) Ljapunovova teorie stability s aplikací v syntéze řízení, kdy jistým způsobem formulujeme pozitivní skalární funkci stavů systému, kterou vhodným výběrem řízení přinutíme klesat, čímž zaručíme stabilitu navrženého nelineárního systému.

Řízení je pak možné syntetizovat lineárně, po předchozím převedení systému do lineární oblasti s využitím linearizace, a to

- linearizace klasické (1. Ljapunovova metoda), linearizující nelineární systém lokálně v okolí rovnovážného stavu a vycházející z intuitivní představy, že za

určitých předpokladů se bude tento systém při malých odchylkách od rovnovážného stavu chovat podobně jako jeho lineární aproximace,

- gain-scheduling (programované zesílení), kdy se systém linearizuje kolem většího počtu pracovních bodů, které dostatečně pokrývají pracovní oblast, a výsledný regulátor se zpravidla získá spojitou interpolací parametrů regulátorů při pohybu mezi pracovními body, anebo
- exaktní (zpětnovazební) linearizace, která vykompenzováním nelinearit systému jinými nelinearitami umožňuje tento systém převést v oblasti zpravidla daleko širší, než je přípustná oblast linearizace klasické, na systém lineární.

Další možností je pak řízení nelineární, zahrnující především Ljapunovovu teorii.

V neposlední řadě je pak možné sáhnout u modelů s nejistotou na vstupu či v modelu k robustnímu či adaptivnímu řízení (sliding-mode control) a dále využít široké palety možností umělé inteligence, především pak neuronových sítí.

### III. Model magnetické levitace

Magnetická levitace nachází široké uplatnění u vysokorychlostních vlaků, kde eliminuje tření, v robotice při potřebách přesného polohování a v mnoha dalších aplikacích.

Hardware aplikačního modelu obsahuje elektromagnet, představovaný měděnou cívkou, ocelovou kuličku, induktivní snímač polohy, operační zesilovač a D/A a A/D převodníky, viz. obr.:



Interface tvoří výstupní napětí ze snímače polohy a vstupní napětí na zesilovač /cívku, přičemž proud tekoucí cívkou je přímo úměrný vstupnímu napětí.

Z matematického hlediska jde o nelineární, v otevřené smyčce nestabilní SISO systém 2./3. řádu (v závislosti na přesnosti použitého modelu). Model tohoto systému je možné sestavit buďto metodou systematického modelování, vycházející z variačního počtu, anebo použít druhou, intuitivnější cestu rovnováhy sil, jenž je ilustrována níže. Dodejme, že konstanty modelu byly stanoveny experimentální identifikací.

Rovnováha sil:

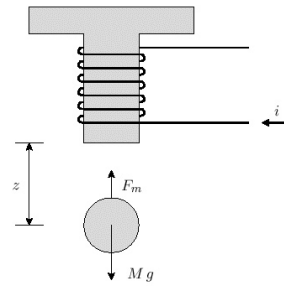
$$F_a = F_m - F_g \Leftrightarrow m_k \ddot{x} + k_{fv} \dot{x} = \frac{k_c i^2}{(x - x_0)^2} - m_k g$$

D/A převodník, dynamika 1. řádu:

$$K_{AM}(u - K_S R_S i) = iR + \frac{di}{dt} L \Leftrightarrow \frac{I}{U} = \frac{k_i}{T_a p + 1} \Rightarrow T_a i' + i = k_i \cdot u \quad \begin{array}{l} \text{Stavový} \\ \text{model,} \\ \text{afinní} \end{array}$$

systém 3. řádu:

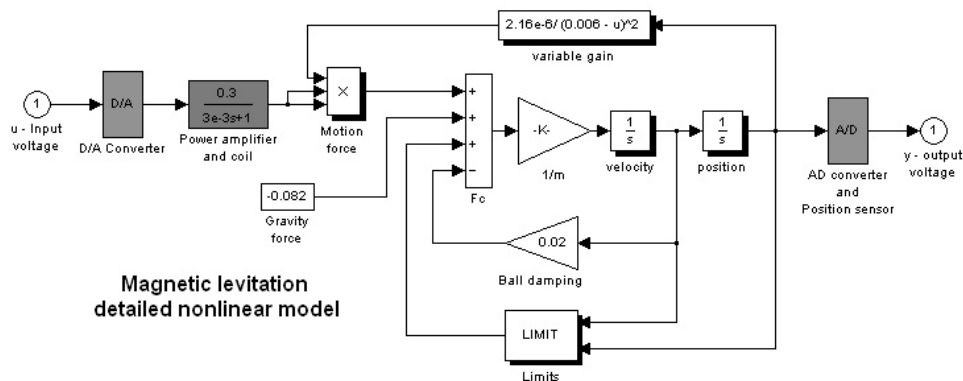
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{k_c}{m_k} \cdot \frac{x_3^2}{(x_1 - x_0)^2} - g - \frac{k_{fv}}{m_k} x_2 \\ \dot{x}_3 &= \frac{k_i}{T_a} u - \frac{1}{T_a} x_3 \\ y &= x_1 \end{aligned}$$



V rovnovážném stavu, odpovídajícímu klidové poloze kuličky v požadované výšce  $x_1 = w$  zcela vymizí vektorové pole zadávající zjednodušený model soustavy, tedy:

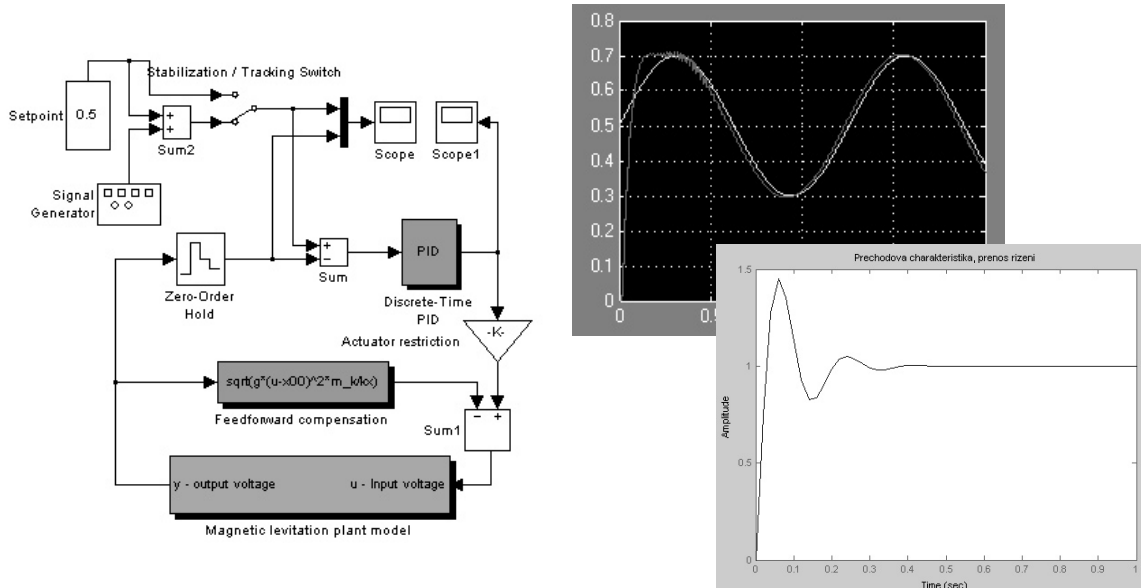
$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0, \quad \dot{x}_2 = 0 = \frac{k_i^2 k_c}{m_k} \cdot \frac{u_{00}^2}{(w - x_0)^2} - g - \frac{k_{fv}}{m_k} x_2, \quad \text{kde } x_2 = 0$$

Stavový model v Simulinku:



#### IV. Klasická linearizace

Nejprve byl systém v okolí svého rovnovážného stavu linearizován 1. Ljapunovovou metodou a následnou syntézou pomocí metody geometrického místa kořenů byl navržen PID regulátor. V rámci této metody byla s ohledem na stabilitu systému nejprve zvolena poloha dominantního pólu dostatečně vlevo na reálné ose, vhodně umístěny dvě volitelné nuly a postupným návrhem PD a PI regulátoru syntetizován vlastní regulátor PID. Simulovaný systém byl z důvodu urychlení reakce na vstupní poruchu doplněn o dopřednou kompenzaci regulační odchylky. Výsledky linearizace jsou patrné z přechodové charakteristiky systému a z průběhu trajektorie kuličky, sledující požadovaný sinusový signál.



U afinních systémů je možné provést linearizaci pomocí stavové transformace a nelineární zpětné vazby (vstupní transformace) a výsledný lineární systém poté řídit stavovým regulátorem. Taková exaktní linearizace, na rozdíl od linearizace v okolí rovnovážného stavu, nezanedbává Taylorovy členy vyššího stupně, nýbrž je eliminuje. Tato metoda využívá především prostředků diferenciální geometrie, jmenovitě Lieovy algebry, přičemž pro čtenářovu jasnou interpretaci níže uvedené klíčové věty je třeba nadefinovat dva základní pojmy tohoto aparátu:

- a) Lieova derivace, představující směrovou derivaci hladkého skalárního pole  $h: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  vzhledem k hladkému vektorovému poli  $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  je definována vztahem:

$$L_f h = \nabla h \cdot f = \left( \frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right) \cdot f(x)$$

- b) Lieova závorka, představující derivaci hladkého vektorového pole  $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  vzhledem k vektorovému poli  $g: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  je definována vztahem:

$$ad_f g = [f, g] = (\nabla g) \cdot f - (\nabla f) \cdot g. \text{ Rekurzivně je možno psát } ad_f^i g = [f, ad_f^{i-1} g], \text{ tedy např. } ad_f^2 g = [f, ad_f^1 g] = [f, [f, g]].$$

**Věta: Nelineární systém  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  je linearizovatelný (tj. existuje difeomorfismus  $T$  a nelineární zpětná vazba  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ , že nové stavové proměnné  $z = T(x)$  a nový vstup  $v$  vytvářejí lineární systém v kanonickém tvaru  $z_1 \dot{=} z_2 \dots z_{n-1} \dot{=} z_n, z_n \dot{=} v$ ) tehdy a jen tehdy, existuje-li oblast  $\Omega$ , v níž platí podmínky říditelnosti a involutivity.**

*Pozn. 1:*

Jsou-li  $T(x)$  a  $T^{-1}$  hladká zobrazení a  $T(x)$  je invertovatelné pro všechna  $x \in \mathfrak{R}^n$ , pak  $T(x)$  je globální difeomorfismus.

*Pozn. 2:*

Podmínka říditelnosti požaduje v oblasti  $\Omega$  lineární nezávislost vektorových polí  $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g\}$ . Podmínka involutivity znamená, že vytvoříme-li Lieovu závorku z kterýchkoliv dvou polí uvedené množiny, pak výsledné vektorové pole lze vyjádřit jako lineární kombinaci původní množiny vektorových polí, tedy

$$\exists \gamma_{ijk} : [f_i, g_j](x) = \sum_{k=1}^m \gamma_{ijk}(x) \cdot f_k(x) \quad 1 \leq i, j \leq m \quad i \neq j.$$

Tato vlastnost tvoří základní předpoklad úplné integrovatelnosti množiny vektorových polí, která úzce souvisí s řešitelností soustavy parciálních diferenciálních rovnic.

V obecném případě převádíme nelineární afinní systém na lineární linearizací vstup-výstup dle následujícího schématu:

$$\begin{array}{l} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x), \quad x \in \mathfrak{R}^n \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \dot{z} = Az + bv \\ \tilde{y} = \tilde{h}(z), \quad z \in \mathfrak{R}^n \end{array}$$

Po zjednodušení našeho modelu, kdy však zanecháváme všechny jeho význačné rysy, vypadá zmíněná transformace následovně:

$$\begin{array}{l}
 \dot{x}_1 = x_2 \\
 \dot{x}_2 = \frac{k_c}{m_k} \cdot \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^2 - g \\
 \dot{x}_3 = u \\
 y = x_1
 \end{array}
 \quad \xrightarrow{y^{(i)}(t) = \tilde{y}^{(i)}(t)} \quad
 \begin{array}{l}
 \dot{z}_1 = z_2 \\
 \dot{z}_2 = z_3 \\
 \dot{z}_3 = v \\
 \tilde{y} = z_1
 \end{array}$$

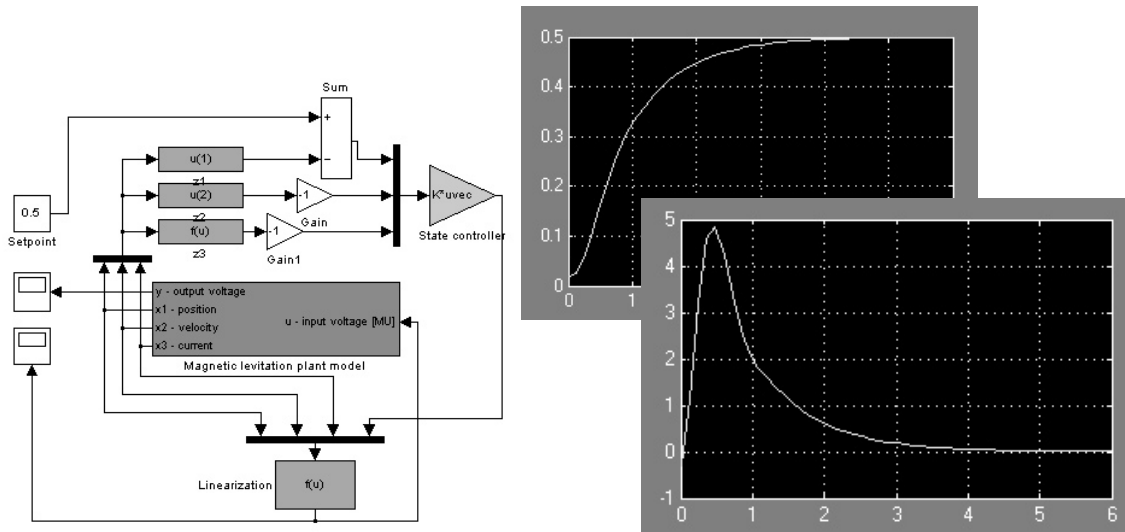
$i = 0, 1, \dots, n.$

Výpočet lineární reprezentace lze provést tak, že výstup derivujeme postupně tolikrát, až se objeví závislost na řízení  $u$ , tedy:

$$\begin{array}{l}
 \dot{y} = \dot{x}_1 \\
 \ddot{y} = \dot{x}_2 = \frac{k_c}{m_k} \cdot \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^2 - g \\
 \ddot{\tilde{y}} = \ddot{x}_2 = -\frac{2k_c}{m_k} \cdot \frac{x_3^2}{x_1^3} \cdot x_2 + \frac{2k_c}{m_k} \cdot \frac{x_3}{x_1^2} \cdot u = v
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 z_1 = x_1 \\
 z_2 = x_2 \\
 z_3 = \frac{k_c}{m_k} \cdot \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^2 - g \\
 u = -\frac{x_3 x_2}{x_1} + \frac{m_k x_1}{2k_c x_3} \cdot v
 \end{array}$$

Stavový regulátor :  $v = -k_1(z - w) - k_2 z_2 - k_3 z_3$ , volbou konstant  $k_1, k_2$  a  $k_3$  lze nastavit vhodnou dynamiku

Schéma exaktní linearizace a následného umístění pólů pomocí stavového regulátoru, stejně tak jako průběh vstupního napětí, přímo úměrného poloze kuličky, a výstupního napětí jsou znázorněny na obrázku.



## VI. Generace Ljapunovových funkcí

Problematika Ljapunovových funkcí je dobře známá a proto jen připomeňme, že zvláštní pozornost byla věnována algoritmizovatelným metodám.

Principy metod, které byly testovány na nebuzeném systému, vycházejí z

- a) přímé volby  $V(x)$ , obvykle ve tvaru kvadratické formy (Krasovského metoda: řešení maticové rovnice, kontrola negativní definitnosti),

- b) volby  $\nabla V(x) \rightarrow$  vhodný postup pro integraci (Variabilní gradient: potenciál  $V(x)$  určíme z gradientu jako křivkový integrál. Podmínkou je potenciálnost vektorového pole),
- c) volby  $V'(x) \rightarrow$  řešení PDR (Zubovova metoda: volba pozitivně definitní funkce  $-Q(x)$  s ohledem na zjednodušení jinak velmi komplikovaných výpočtů), anebo
- d) přímá integrace pohybových rovnic systému (energetické metody, prakticky nealgoritmizovatelné).

Ke studiu stability byl použit zjednodušený model nebuzeného systému 2.řádu

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{M}{(x_1 - x_0)^2} - g - \beta \cdot x_2,$$

ze kterého je mj. patrná neexistence limitních cyklů, jelikož Bendixonovo kritérium

$$I = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\beta \quad \text{nemění znaménko v celé fázové rovině.}$$

Metodou variabilního gradientu jsme dospěli k Ljapunovově funkci ve tvaru

$$V = \int_0^{x_1} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2} \left[ x_2^3 \cdot \beta + x_2^2 \left( g - \frac{M}{(x_1 - x_0)^2} \right) \right] dx_2$$

Energometrický algoritmus, využívající prvních integrálů, dává v tomto případě stejný výsledek jako Barbašinova metoda, ve tvaru:

$$V = \int_0^{x_1} \left( g - \frac{M}{(\zeta - x_0)^2} \right) d\zeta + \int_0^{x_2} \eta d\eta = 2M \cdot \left( \frac{1}{(x_1 - x_0)^3} \cdot \frac{1}{x_0^3} \right) + \frac{x_2^2}{2}$$

Zubovovou metodou je možné dospět k Ljapunovově funkci ve tvaru řešení parciální diferenciální rovnice s variabilními koeficienty, konkrétně

$$V = \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot \left[ \frac{M}{(x_1 - x_0)^2} - g - \beta \cdot x_2 \right] = -(x_1^2 + x_2^2).$$

## VII. Závěr

V současné době se k řízení systému jeví jako nejvýhodnější metodika založená na exaktní linearizaci. Systém je možno dále zkoumat především z hlediska řízení pomocí robustních technik typu Sliding Mode a Variable Structure Control, případně v kombinaci s neuronovými sítěmi či fuzzy regulátory, jakožto zástupci moderních prvků umělé inteligence.

Kontaktní informace: [petr.hotmar@vscht.cz](mailto:petr.hotmar@vscht.cz), [jaromir.kukal@vscht.cz](mailto:jaromir.kukal@vscht.cz)

### Seznam použité literatury:

- 1) Razím M., Štecha J.: Nelineární systémy, 2002.
- 2) Kubík S., Kotek Z., Strejc V., Štecha J.: Teorie automatického řízení I, 1982.
- 3) Slotine J.E., Li W.: Applied Nonlinear Control Systems, 1990.
- 4) Humusoft: Model magnetické levitace – manuál