

HIERARCHICKÝ OPTIMÁLNÍ REGULÁTOR

Branislav Reháč

ČVUT FEL, katedra řídicí techniky

1 Úvod

Složité systémy není možné řídit najednou jedním regulátorem, který by dokázal pracovat se všemi regulovanými veličinami naráz. Je to proto, že takový regulátor by byl nejen velmi složitý a nepřehledný, ale jakákoliv změna v soustavě by mohla vést k nutnosti měnit podstatné části regulátoru.

Proto je nutné v praxi navrhovat takové regulátory, které pracují s menším množstvím regulovaných veličin. Pak je struktura regulačního obvodu jednodušší. To je případ decentralizovaného řízení. Dalším stupněm je rozložení řídicího systému do více úrovní. Vyšší úrovně jsou odpovědné za regulaci nejdůležitějších veličin v delším časovém intervalu. Naopak nižší úrovně mají za úkol zajistit dodržení cílů vytčených vyššími úrovněmi. To je princip tzv. hierarchického řízení. Tato metodika byla rozvinuta v osmdesátých letech Findeisenem, Singhem atd. V devadesátých letech nastal v tomto oboru jistý útlum, i přes značnou důležitost těchto postupů v praxi.

Předkládaná práce si klade za cíl oživit zájem o tuto problematiku a zároveň ukázat cestu, jak ji propojit s metodami, které byly vyvinuty v devadesátých letech, jako je např. robustní řízení.

2 Dekompozice do subsystémů a neurčitost

Při dekompozici systému do subsystémů a při zanedbání vazeb mezi nimi je nutné zvolit takové řízení, aby nedocházelo k nežádoucím interakcím mezi subsystémy. Můžeme si to představit tak, že k dekomponovanému systému je paralelně připojen ještě další, neznámý systém. Jeho vliv si můžeme představit jako aditivní neurčitost.

Je-li dán systém

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du \quad (1)$$

přičemž předpokládáme, že ho lze dekomponovat do N subsystémů, z nichž každý je popsán maticemi A_i, B_i, C_i, D_i . Označíme-li

$$A_{dec} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_N \end{pmatrix}, \quad B_{dec} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_N \end{pmatrix},$$
$$C_{dec} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_N \end{pmatrix}, \quad D_{dec} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_N \end{pmatrix},$$

pak můžeme systém (1) zapsat ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = A_{dec} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} + B_{dec} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} + \Delta A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} + \Delta B \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = C_{dec} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} + D_{dec} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} + \Delta C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} + \Delta D \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \quad (3)$$

Matice $\Delta A, \Delta B, \Delta C, \Delta D$ reprezentují vazby mezi systémy, které jsou při návrhu regulátoru zanedbány.

Přenos decentralizovaného systému bude

$$F_{dec}(s) = C_{dec}(sI - A_{dec})^{-1}B_{dec} + D_{dec}. \quad (4)$$

Odvodíme vztah pro neurčitost vzniklou zanedbáním vazeb. Přenos celého systému včetně vazeb je

$$F(s) = (C_{dec} + \Delta C)(sI - (A_{dec} + \Delta A))^{-1}(B_{dec} + \Delta B) + D_{dec} + \Delta D. \quad (5)$$

Po roznásobení a zanedbání členů druhého řádu dostaneme

$$F(s) = (C_{dec} + \Delta C)(sI - A_{dec})^{-1}B_{dec} + C_{dec}(sI - A_{dec})^{-1}(B_{dec} + \Delta B) + \\ C_{dec}(sI - (A_{dec} + \Delta A))^{-1}B_{dec} + D_{dec} + \Delta D.$$

Rozvojem členu

$$(sI - (A_{dec} + \Delta A))^{-1}$$

do Taylorova rozvoje prvního řádu dostaneme, že

$$(sI - (A_{dec} + \Delta A))^{-1} = (sI - A_{dec})^{-1} + (sI - A_{dec})^{-1}\Delta A(sI - A_{dec})^{-1} + \dots$$

S využitím tohoto vztahu (lze ho alternativně odvodit pomocí lemmatu o inverzi matice, viz [2]) dostaneme pro aditivní neurčitost $\Delta F(s)$ následující přibližnou rovnost:

$$\Delta F(s) = F(s) - F_{dec}(s) \doteq \Delta C(sI - A_{dec})^{-1}B_{dec} + C_{dec}(sI - A_{dec})^{-1}\Delta B + \\ C_{dec}(sI - A_{dec})^{-1}\Delta A(sI - A_{dec})^{-1}B_{dec} + D_{dec}. \quad (6)$$

Regulátory v dolní úrovni musí být tak robustní, aby soustavu stabilizovaly i za přítomnosti neurčitosti $\Delta F(s)$.

3 Rozdělení do úrovní

Systém je nutné rozdělit na subsystemy, což na jednu stranu zjednoduší nalezení řídicího algoritmu pro každý jednotlivý subsystem, nadruhou stranu ovšem vyvstává nebezpečí konfliktů mezi jednotlivými subsystemy. To proto, že řízení každého subsystemu sleduje vlastní cíle, jejichž dosažení by mohlo prostřednictvím vazeb bránit dosažení cílů v jiných subsystemech. Proto je nutné zavést vyšší úroveň, která bude koordinovat regulátory v nižších úrovních tak, aby nedocházelo k nežádoucím interakcím. Z toho vyplývají i různé nároky na obě úrovně. Ty lze shrnout například takto: **Vyšší úroveň**

- určuje optimální trajektorii systému,
- provádějí se v ní náročné výpočty,
- při výpočtech se bere v úvahu celá struktura systému, případné nelinearity apod.

Nižší úroveň

- zajišťuje sledování trajektorie vypočtené ve vyšší úrovni,
- kompenzují se zde vlivy poruchových veličin,

- zákon řízení by měl být co nejjednodušší, nejlépe ve tvaru zpětné vazby,
- pro výpočet řízení systém dekomponovat, využívat jen nejpodstatnějších vazeb mezi subsystemy, nelinearity nahradit linearizací atd.

V našem případě je ve vyšší úrovni řešena úloha dynamické optimalizace, v nižších úrovních jsou použity H_∞ regulátory (viz [7]).

Stručně popíšeme součinnost obou úrovní regulátoru. Vyšší úroveň se periodicky aktivuje, periodu označme T_H . Při každé aktivaci se zároveň nahraje trajektorie pro následující interval (minimálně) délky T_H do bufferu, odkud tyto údaje čtou regulátory v dolní úrovni. Zároveň začne výpočet optimální strategie ve vyšší úrovni. Ta se počítá pro interval délky T_i , kde $T_H \leq T_i$.

Je třeba upozornit, že v čase T , kdy začíná pracovat optimalizační algoritmus, musí být již připraveny hodnoty referencí pro interval $(T, T + T_i)$. Proto je nutné v tomto intervalu řešit optimalizační problém P na intervalu $(T + T_H, T + T_H + T_i)$. K tomu je nutné znát hodnoty stavů v čase $T + T_H$. Ty získáme z již spočítané reference. Přesnější odhad by bylo možné získat predikcí vývoje stavů systému v uzavřené smyčce. Více viz [4, 5].

4 Vyšší úroveň

Nyní formulujeme úlohu, kterou řeší vyšší úroveň na intervalu $(\tau, \tau + T_H)$. Jedná se o standardní problém dynamické optimalizace, jak je popsán např. v [1]. Hledáme x^* , u^* tak, že

$$\int_{\tau}^{\tau+T_H} J(x^*(t), u^*(t)) dt$$

je minimální, za podmínky

$$\dot{x}^* = f(x^*(t), u^*(t)), \quad x^*(\tau) = x_0.$$

Tento problém označíme jako problém (P) na intervalu $(\tau, \tau + T_H)$ s počáteční podmínkou x_0 .

Kromě stavu systému zavedeme ještě další veličinu, tzv. kostav (adjungovaný stav λ). Jeho rozměr je stejný jako rozměr stavu. Další neznámé budou řízení, která se také vypočtou pro celý interval $(\tau, \tau + T_H)$.

Úloha dynamické optimalizace je tedy převedena na úlohu minimalizace Lagrangeovy funkce

$$L = \int_{(k+1)T_v}^{(k+2)T_v} J(x(t), u(t)) + \lambda(t)(\dot{x} - A(x(t)) - Bu(t)) dt,$$

Pro optimální řízení platí, že splňuje následující okrajovou úlohu:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \tag{7}$$

$$\dot{\lambda} = D_x J(x(t), u(t)) + A^T \lambda(t) \tag{8}$$

$$0 = D_u J(x(t), u(t)) + B^T \lambda(t). \tag{9}$$

Symbol $D_x F(x)$ znamená derivaci funkce F podle x . Okrajové podmínky pro stavy jsou dány jejich hodnotami v bodě τ , kostavy splňují podmínku $\lambda(\tau + T_H) = 0$. Více viz [1].

5 Nižší úroveň

Pro sledování reference byly zvoleny H_∞ -regulátory, pro každý subsystém jeden. Výhodou návrhu H_∞ regulátorů je to, že se dá formulovat pomocí řešení dvou Riccatiho rovnic [7]. Přitom řešení Riccatiho rovnice pro decentralizovaný systém má stejnou strukturu, jako původní systém, jak je ukázáno v [6]. Z toho plyne, že H_∞ řízení decentralizovaného systému je také decentralizované. Pro každý subsystém je tedy možné navrhnout regulátor zvlášť.

Každý regulátor musí dokázat zajistit požadované chování uzavřené smyčky i za přítomnosti aditivní neurčitosti (6). Tato neurčitost může mít velký stupeň. Proto pro zjednodušení návrhu

předpokládejme, že existuje funkce w_2 taková, že $w_2(j\omega) \geq \Delta F(j\omega)$. Dále požadujeme, aby zesílení přenosu uzavřené smyčky z reference na regulační odchylku bylo na nízkých frekvencích dostatečně vysoké. Zvolíme tedy váhovou funkci w_1 .

Požadavky na chování regulačního obvodu tedy budou:

- $\|w_1\|$ musí být volena tak, aby byla zaručeno sledování referenční trajektorie
- $\|w_2\|$ musí splňovat $\|w_2^{-1}(j\omega)\| \geq \max |\sigma(R(j\omega))|$ pro každé ω , kde $R = F(1 + FS)^{-1}$. Přitom F je přenos regulátoru a S je přenos soustavy. Symbol σ označuje množinu singulárních čísel.

Tyto požadavky musí splňovat každý z regulátorů K_1, \dots, K_N . Podaří-li se takové regulátory najít, je úloha vyřešena.

Použití H_∞ -regulátorů má i tu výhodu, že není třeba trajektorii vypočtenou ve vyšší úrovni nijak transformovat, jako tomu je v případě sledování reference LQ regulátorem. Toto byla časově nejnáročnější část výpočtu v případě použití LQ regulátorů v dolní úrovni, viz [4]. Naopak, nevýhodou H_∞ -regulátorů je relativně vyšší složitost v porovnání s LQ regulátory. Její snížení prostřednictvím snížení řádu regulátoru nebylo zkoumáno, ale pro praktické použití by pravděpodobně bylo nutné tuto operaci provést.

6 Příklad

Jako příklad jsme zvolili systém z úlohy 5.2.6. z [3]. Tento systém je dán rovnicí:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 0.5 \\ 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u \quad (10)$$

Tento systém můžeme rozdělit na dva systémy, které spolu slabě interagují. První subsystém je tvořen prvními třemi stavy, druhý systém zbylými dvěma stavy.

Matici C jsme zvolili jako

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

přímá vazba ze vstupu na výstup není.

Z toho plyne, že $\Delta B = 0$, $\Delta C = 0$, $\Delta D = 0$ a

$$\Delta A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

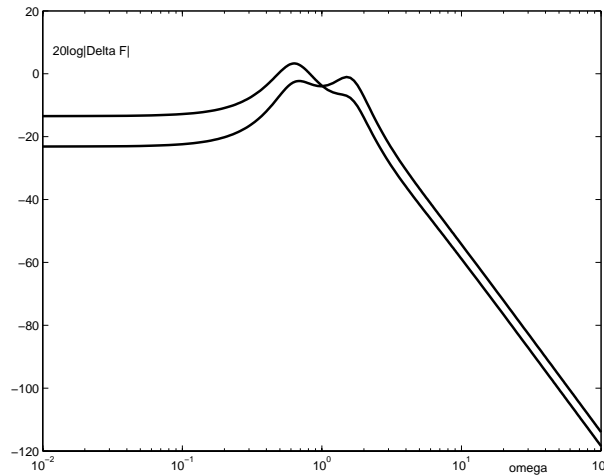
Závislost absolutní hodnoty singulárních čísel přenosu ΔF jsou na obr. 1.

Výpočet ve vyšší úrovni se opakuje každou časovou jednotku. Optimalizační úloha se řeší na intervalu o délce 10 časových jednotek.

Pro jednoduchost je optimalizováno kvadratické kritérium s maticemi $Q = \frac{10^5}{2} \text{diag}(1, 1)$, $R = \frac{1}{2} \text{diag}(1, 1)$, označení stejné jako v [2]. Pro řešení tohoto problému byl použit systém Femlab. Ten umožňuje řešit okrajové problémy pro soustavu obyčejných diferenciálních rovnic. (Podrobnosti viz [8].) První subsystém měl sledovat funkci \sin , druhý měl držet konstantní hodnotu 2.

Pro nalezení regulátorů v nižších úrovních byla použita funkce **hinfric**, která spočítá H_∞ -regulátor pro zadaný systém. Tato funkce byla použita dvakrát, pro každý subsystém zvlášť. Váhové funkce byly voleny takto:

$$w_2 = \frac{0.8(s/0.1 + 1)}{s/2 + 1}, \quad w_1 = \frac{10^7(s/500 + 1)(s/1000 + 1)}{(s/10 + 1)(s/10 + 1)}$$



Obrázek 1: Amplitudová charakteristika ΔF

Sledování referencí je zobrazeno na obr. 2 pro první výstup a na obr. 3 pro druhý výstup. První výstup měl sledovat referenci $y = \sin 4t$ a druhý výstup měl sledovat konstantní referenci $y = 2$.

7 Závěr

Byl popsán návrh hierarchického regulátoru, kde v nižších úrovních jsou robustní regulátory. Výhodou je možnost popsat vynechané vazby pomocí aditivní neurčitosti, nevýhodou je velký řád regulátoru.

Návrh byl demonstrován na příkladu z novější literatury na toto téma [3].

Reference

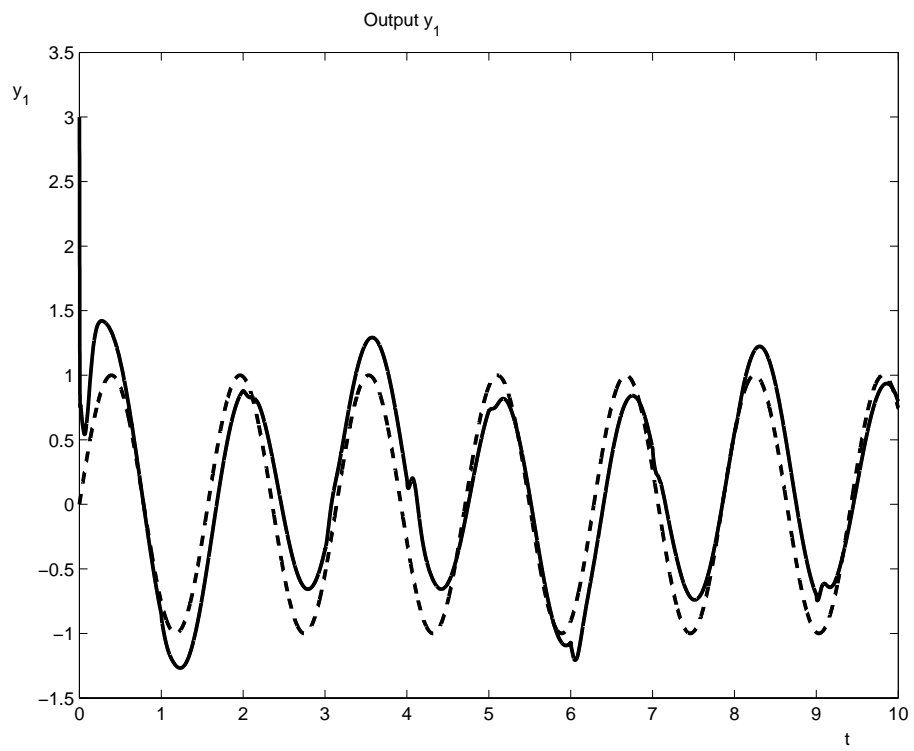
- [1] Bryson, A.E., Ho, Y., *Applied Optimal Control*, J. Wiley, New York, 1975
- [2] Havlena, V., Štecha, J., *Moderní teorie řízení*, Vyd. ČVUT, Praha, 1996
- [3] Jamshidi, M., *Large-scale Systems: Modeling, Control and Fuzzy Logic*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 1997
- [4] Reháček, B., Hierarchický optimální regulátor, *MATLAB 2002*, Humusoft, Praha, 2002
- [5] Reháček, B., Design of a Hierarchical Controller Using FEMLAB, *In: Proceedings of the IASTED Conference on Modelling, Identification and Control*, ACTA Press, Zürich, 2003
- [6] Trave, L., Titli, A., Tarras, A., *Large Scale Systems: Decentralization, Structure Constraints and Fixed Modes*, Springer, Berlin 1989
- [7] Zhou, K., *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 1998
- [8] *Femlab Reference Manual v. 2.0*, COMSOL AB, 2000

Kontakt

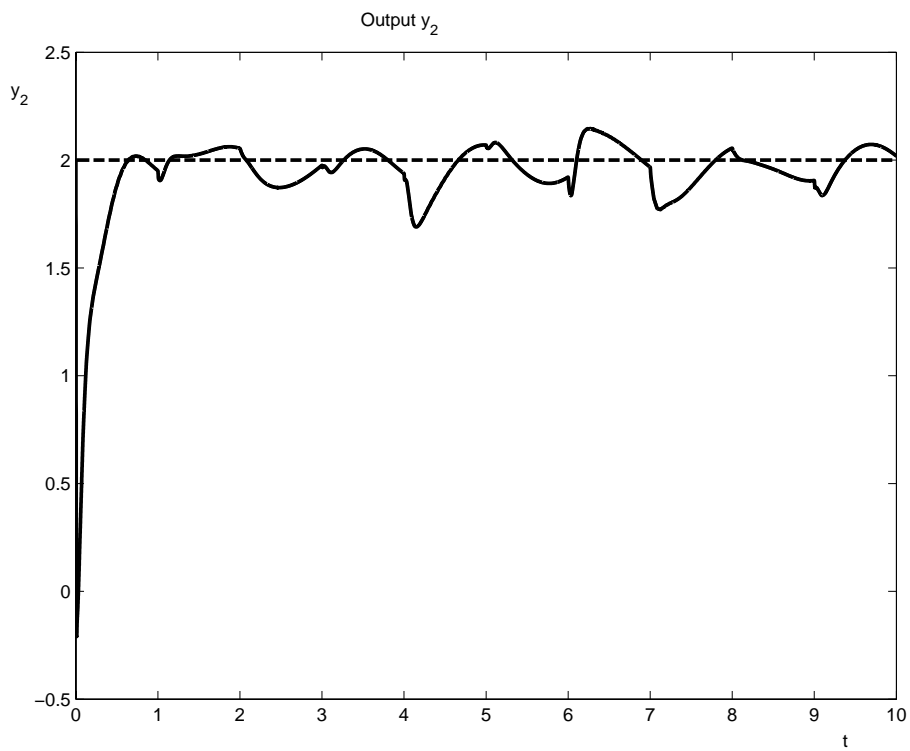
Branislav Reháček
 ČVUT FEL, katedra řídicí techniky
 Karlovo nám. 13
 121 35 Praha 2

tel. 2 / 2435 7336

rehakb@control.felk.cvut.cz



Obrázek 2: Výstup y_1



Obrázek 3: Výstup y_2