

# WAVELET TRANSFORMACE V POTLAČOVÁNÍ RUŠIVÝCH SLOŽEK OBRAZŮ

*Andrea Gavlasová, Aleš Procházka*

Vysoká škola chemicko-technologická, Ústav počítačové a řídicí techniky

## Abstrakt

Příspěvek je zaměřen na problematiku dekompozice a rekonstrukce obrazů s využitím wavelet transformace. Součástí práce je prezentace algoritmů wavelet transformace. Výsledné algoritmy byly nejprve ověřeny na simulovaných datech a poté aplikovány na reálná data biomedicínských obrazů. Cílem tohoto postupu je potlačení šumu s použitím vypočítaných prahových hodnot a zvýraznění obrazů. Všechny algoritmy byly vytvořeny s podporou programového prostředí Matlab.

## 1 Úvod

Oblast analýzy a zpracování obrazů představuje širokou vědní disciplínu navazující na obecné metody zpracování jednorozměrných signálů. Odstranění šumu a následná rekonstrukce obrazů tvoří základní část metod zpracování dvourozměrných signálů s mnoha aplikacemi včetně zpracování inženýrských obrazů a zlepšování biomedicínských struktur.

K nejvýznamnějším metodám pro zpracování signálů a obrazů patří wavelet transformace s ohledem na její možnosti různého rozlišení v časové a frekvenční oblasti. Její uplatnění může být rovněž v odstranění nežádoucích složek signálů po jejich předchozí dekompozici a prahování koeficientů.

První část článku se zaměřuje na popis wavelet transformace a její použití pro analýzu obrazů. Hlavní část se věnuje algoritmům dekompozice a rekonstrukce obrazů s aplikací na odstranění jejich rušivých složek. V závěru jsou prezentovány výsledné obrazy po použití wavelet transformace.

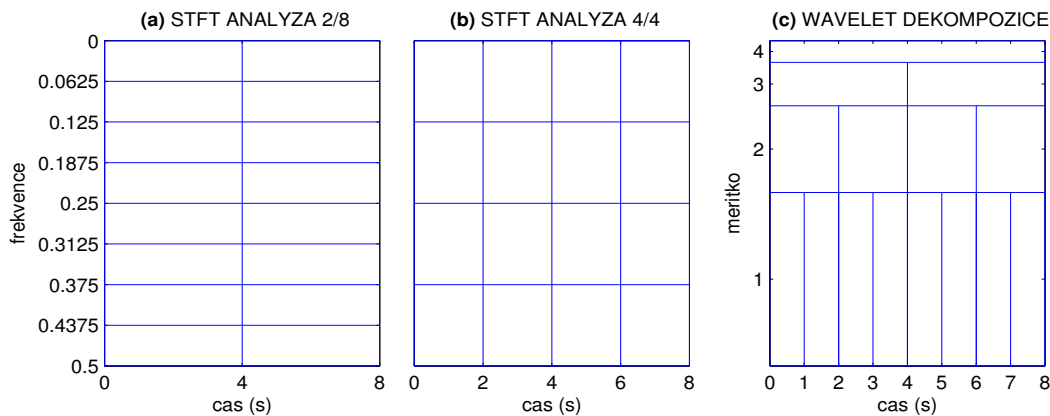
Příspěvek zahrnuje některé vybrané algoritmy, které byly vytvořeny v prostředí systému Matlab a ověření metod bylo provedeno na simulovaných datech a aplikováno na data reálná.

## 2 Princip wavelet transformace

Wavelet transformace představuje alternativu ke krátkodobé Fourierově transformaci a je částí hlavního směru číslicového zpracování signálů (DSP-Digital Signal Processing). Wavelet analýza představuje další logický krok: okénkovou techniku s proměnlivou velikostí okénka. Základem transformace je časově omezená funkce užitá pro analýzu daných signálů.

Diskrétní Fourierova transformace i wavelet transformace poskytují informace o frekvenčním obsahu signálu. Diskrétní Fourierova transformace může poskytnout přesnou frekvenční lokalizaci, ale ne přesnou časovou lokalizaci uvnitř okénka. Jak již bylo řečeno, časové rozlišení se zlepšuje, když se zužuje výběrové okénko.

Výhodou wavelet transformace tedy je, že délka analyzující wavelet funkce se mění v závislosti na úrovni dekompozice. Proměnné frekvenční rozlišení je významným přínosem diskrétní wavelet transformace (DWT). Při vysokých frekvencích poskytuje DWT horší frekvenční rozlišení, ale dobré časové rozlišení. Při nízkých frekvencích je horší časové rozlišení, ale lepší rozlišení frekvenční. DWT určuje nízkofrekvenční složky daných signálů použitím širokého okénka a dále umožňuje přesnou časovou lokalizaci výskytu vysokofrekvenčních složek signálů pomocí úzkých výběrových okének [6].



Obrázek 1: Porovnání Fourierovy a wavelet analýzy prezentující (a) horší časové rozlišení a lepší frekvenční rozlišení pro případ DFT s delším výběrovým okénkem, (b) lepší časové rozlišení a horší frekvenční rozlišení pro případ DFT s kratším výběrovým okénkem a (c) standardní DWT, která používá dilatovanou analyzující wavelet funkci (delší okénko) pro nízké frekvence a úzkou analyzující funkci pro detailní složky signálu

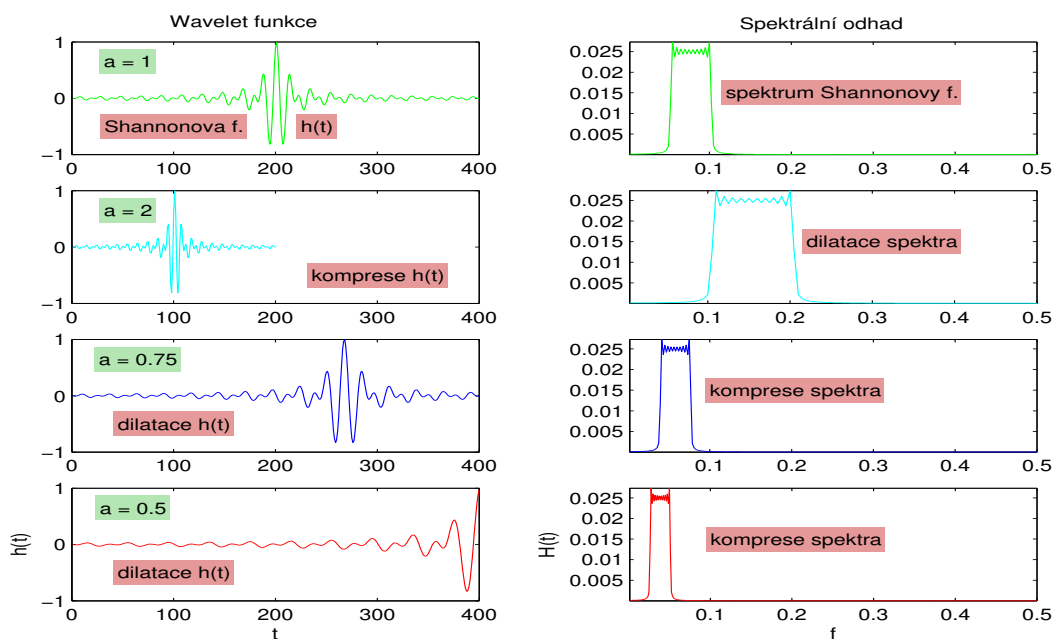
Wavelet funkce používané pro analýzu signálu a obrazu jsou odvozeny ze základní funkce  $W(t)$ , která tvoří základ pro řadu funkcí pro diskrétní parametry dilatace  $a = 2^m$  a translace  $b = k 2^m$ .

$$W_{m,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} W\left(\frac{1}{a}(t-b)\right) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} W(2^{-m}t - k) \quad (1)$$

Příkladem analyticky definované wavelet funkce je např. Shannonova wavelet funkce

$$W(t) = \frac{\sin(\pi \frac{t}{2})}{\pi \frac{t}{2}} \cos(3\pi \frac{t}{2}) \quad (2)$$

Její dilatace umožňuje analýzu daného signálu s různým rozlišením v návaznosti na kompresi spektra této funkce ve frekvenční oblasti. Souvislost mezi dilatací této funkce a odhadem spektra je uvedena na obr. 2.

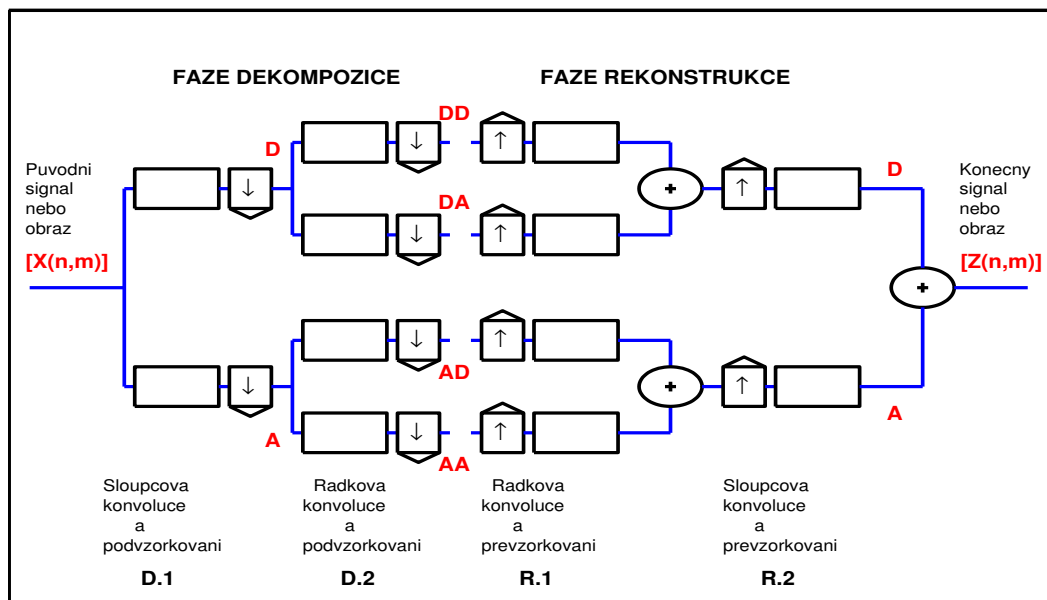


Obrázek 2: Shannonova funkce a její spektrální odhad

### 3 Dekompozice obrazu

V blokové podobě je rozklad daného obrazu na dvě a poté na čtyři části a jeho následná rekonstrukce uvedena na obr. 3, který představuje Mallatovo dekompoziční a rekonstrukční schéma.

Na obr. 3 je naznačen princip dekompozice a rekonstrukce obrazu. Stejný přístup, který je vidět na obrázku, můžeme aplikovat jak na obrazovou matici o rozměrech  $[M, N]$ , tak na každý jednorozměrný signál považovaný jako případ obrazu, který má pouze jeden sloupec  $[M, 1]$ .



Obrázek 3: Mallatovo schéma dekompozice a rekonstrukce jednorozměrných a dvouřozměrných signálů

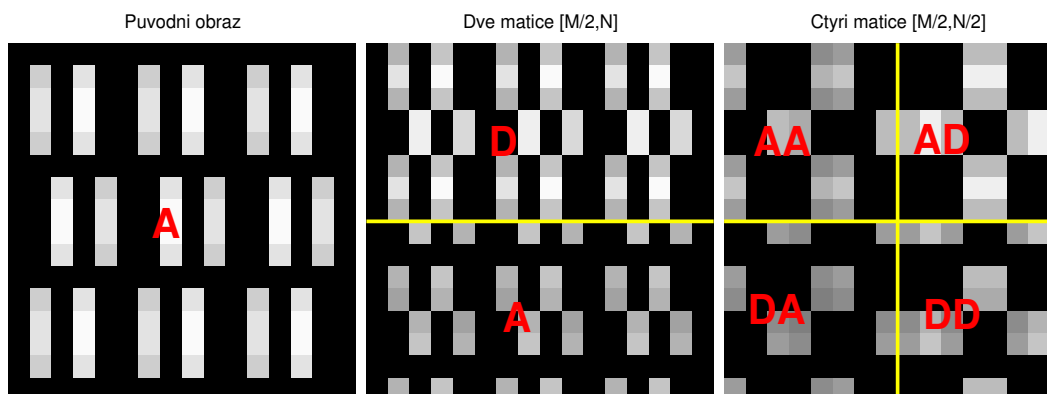
Výsledná matice  $[Z(n, m)]$  je rovna původní matici  $[X(n, m)]$ , pokud zůstanou matice rozkladu DD, DA, AD, AA pro rekonstrukci nezměněné. Kompletní algoritmus Mallatova rozkladu je dokumentovaný obr. 4.

V prvním stupni dekompozice ( $L = 1$ ) dochází nejprve ke zpracování a podvzorkování matice  $X$  o rozměrech  $[M/2^{L-1}, N/2^{L-1}]$  po sloupcích, kde

$M \dots$  počet řádků matice

$N \dots$  počet sloupců matice

$L \dots$  aktuální úroveň (stupeň) dekompozice



Obrázek 4: Zobrazení testovací matice a její dekompozice na dvě matice D, A a jejich další dekompozice na matice AA, AD, DA, DD

příčemž

- v horní větvi aplikujeme vysoko-frekvenční filtr a získáme matici s rozměry  $[M/2^L, N/2^{L-1}]$  tzn. (snižujeme počet řádků na polovinu, počet sloupců zůstává), která obsahuje rychle proměnné složky
- ve spodní větvi aplikujeme nízko-frekvenční filtr a získáme matici s rozměry  $[M/2^L, N/2^{L-1}]$  tzn. (snižujeme počet řádků na polovinu, počet sloupců zůstává), která zachovává důležité pomalu proměnné složky

Získané matice A, D dále podvzorkováváme po řádcích jak je naznačeno v Mallatově schématu.

- na matici D, která vznikla v horní větvi aplikujeme jak vysoko-frekvenční, tak nízko-frekvenční filtr a z této matice získáme dvě matice o rozměrech  $[M/2^L, N/2^L]$  tzn. (snižujeme počet sloupců na polovinu, poloviční počet řádků zůstává)
- na matici A, která vznikla ve spodní větvi aplikujeme také vysoko-frekvenční a nízko-frekvenční filtr a z této matice získáme opět dvě matice o rozměrech  $[M/2^L, N/2^L]$  tzn. (snižujeme počet sloupců na polovinu, poloviční počet řádků zůstává)

Při dalším stupni dekompozice ( $L = 2$ ) se celý postup opakuje a vstupní maticí pro dekompozici se stává matice AA, která vznikla z původní matice X podvzorkováním nízko-frekvenčními filtry po sloupcích a řádcích.

## 4 Odstranění rušivých složek v obraze a rekonstrukce obrazu

Pro následnou rekonstrukci můžeme použít původní matice DD, DA, AD, AA a získáme původní obrazovou matici X o rozměrech  $[M, N]$  nebo, pokud modifikujeme matice DD, DA, AD získáme po rekonstrukci modifikovanou obrazovou matici  $\tilde{X}$  s rozměry  $[M, N]$ . Modifikaci provádíme metodami prahování. Prahování je technika aplikovaná v mnoha aplikacích zpracování signálů a obrazu. Dvě zvláštní pravidla jsou hard a soft prahování.

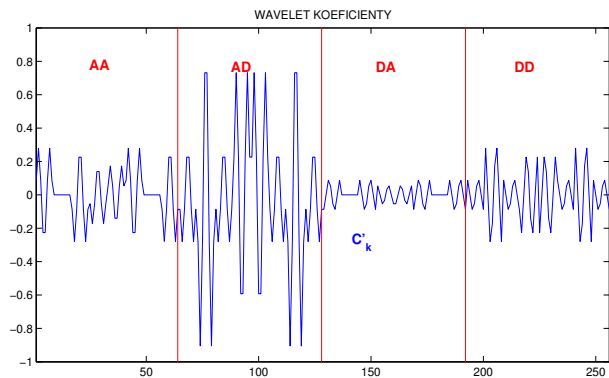
**Hard prahování** - transformuje všechny koeficienty rozkladu s absolutní hodnotou menší než práh ( $\delta$ ) na nulu a ponechává všechny ostatní.

$$c_k = \begin{cases} c'_k & |c'_k| \geq \delta \\ 0 & |c'_k| < \delta \end{cases} \quad (3)$$

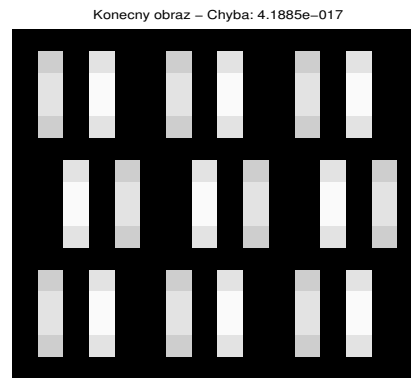
**Soft prahování** - opět vynuluje všechny menší koeficienty než je velikost prahu ( $\delta$ ), ale zmenšuje velikost ostatních větších koeficientů o velikost, která se rovná hodnotě prahu.

$$c_k = \begin{cases} \text{sign}(c'_k) \cdot (|c'_k| - \delta) & |c'_k| \geq \delta \\ 0 & |c'_k| < \delta \end{cases} \quad (4)$$

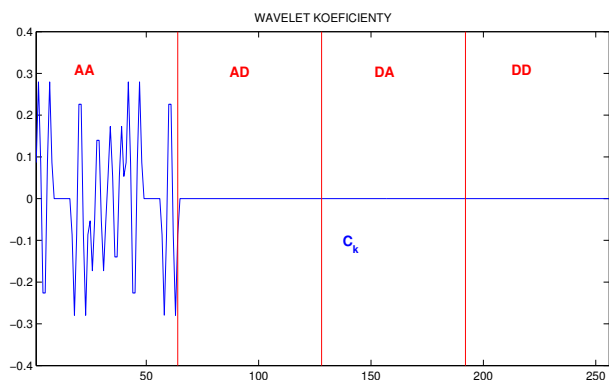
Na obr. 5, 6, 7, 8 je ukázána rekonstrukce s použitím původních a modifikovaných matic. Tyto matice AA, AD, DA, DD pak zjednodušeně převádíme do vektoru a zobrazujeme je jako wavelet koeficienty. Z grafu pak můžeme jednoduše rozpoznat, které koeficienty jsme modifikovali a které jsou zachovány. Chyba, která je zobrazena u konečného obrazu, je vypočítána jako střední kvadratická chyba z rozdílu mezi původní a rekonstruovanou maticí.



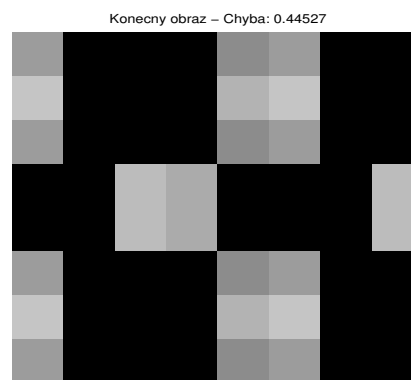
Obrázek 5: Rekonstrukce testovací matice na základě zachovaných dekompozičních koeficientů



Obrázek 6: Konečný obraz odpovídající původní testovací matici



Obrázek 7: Rekonstrukce pomocí koeficientů modifikovaných na základě zvoleného prahu

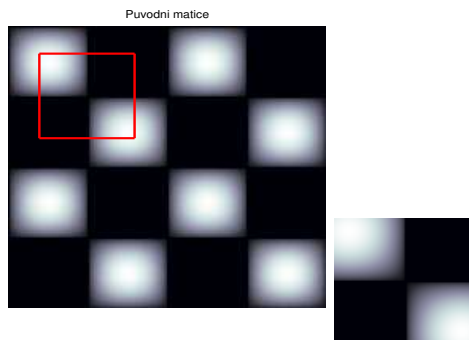


Obrázek 8: Rekonstruovaný obraz neodpovídá původní matici

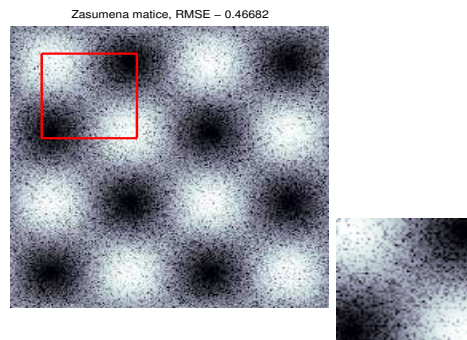
## 5 Výsledky

Analýza a zpracování obrazů pomocí wavelet transformace je nejprve provedena na testovací matici (obr. 9), ke které byl přidán vygenerovaný šum (obr. 10). Výsledné algoritmy jsou pak aplikovány na reálný biomedicínský obraz. Po dekompozici vstupních dat do zvolené úrovně pomocí čtyř různých wavelet funkcí jsou získané koeficienty modifikovány tak, aby ve výsledku došlo k co nejlepšímu odstranění šumu. Na obr. 11 jsou zobrazeny chyby RMSE při soft modifikaci koeficientů a při wavelet transformaci se všemi wavelet funkcemi do 3. stupně. Vybrané výsledky odstranění rušivých složek z obrazu pomocí wavelet transformace aplikované na testovací matici jsou prezentovány na obr. 12.

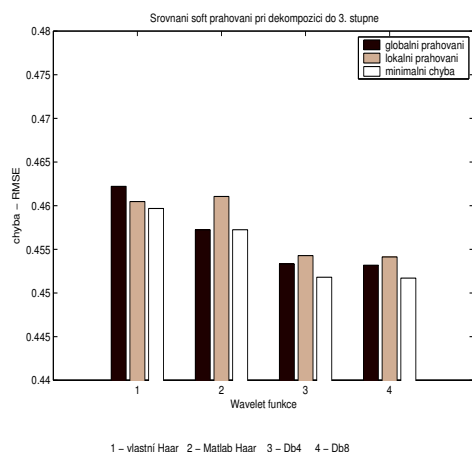
Na obr. 13 je názorně předvedeno použití algoritmu (obr. 14). Do úrovně, kterou si zvolíme, rozložíme zašuměný obraz (obr. 13a). Rozložení obrazu do dané úrovně je ukázáno na obr. 13b. Po výpočtu limitního prahu podle něj modifikujeme koeficienty (obr. 13d) a z nich zpětně zrekonstruujeme obraz (obr. 13c).



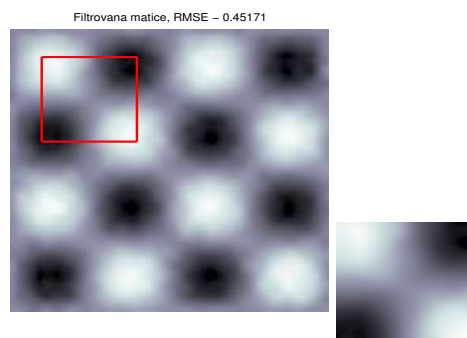
Obrázek 9: Zobrazení původní testovací matice



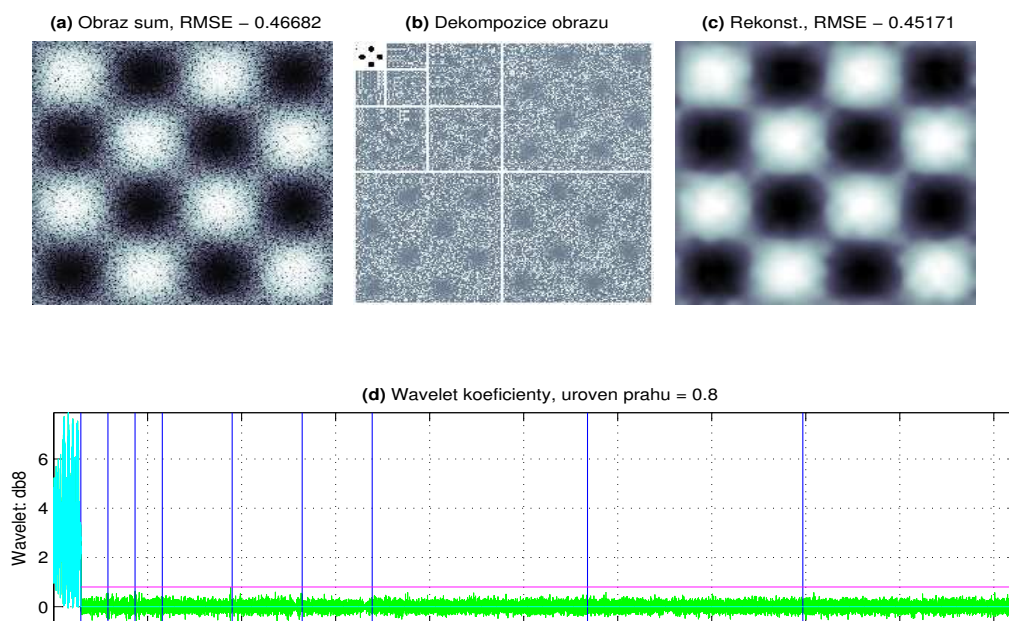
Obrázek 10: Testovací matice s přidaným šumem



Obrázek 11: Grafické srovnání chyb RMSE při soft modifikaci koeficientů uvedenými metodami a při wavelet transformaci do 3. stupně



Obrázek 12: Nejlepší filtrovaná matice při transformaci funkcí Daubechies Db8 do 3.úrovně a aplikací globální soft varianty metody minimální chyby



Obrázek 13: Princip dekompozice testovací matice, prahování a rekonstrukce

# Algoritmus

Podstatná část algoritmu pro ověření wavelet transformace na simulovaných datech a poté na biomedicínských obrazech zahrnuje následující celky:

- dekompozici obrazu do zvolené úrovně se zvolenou wavelet funkcí
- výpočet prahu z koeficientů rozkladu a jejich následnou modifikaci
- rekonstrukci z modifikovaných koeficientů z té úrovně a pomocí té wavelet funkce, jež jsme zvolili v prvním kroku

```
% DEFINICE DEKOMPOZICNICH PARAMETRU %%%%%%%%%%
level=input('Zvol uroven dekompozice: ');
wavelet=input('Zvol wavelet funkci (''db8'', ''db4'', ''haar''): ');
% DEKOMPOZICE %%%%%%%%%%
[c,l]=wavedec2(X,level,wavelet);
lx2=1(2:level+1,1)'; lx2=[lx2; lx2; lx2]; lx2=[l(1);lx2(:)]; lx1=lx2.^2;
h4=axes('Position',[0.09 0.06 0.9 0.3]);
plot(c,'g'); grid on; hold on;
set(gca,'xtickLabel',[]); axis tight; v=axis; hold on; dv=v(3)-0.08*(v(4)-v(3));
ylabel(['Wavelet: ',wavelet])

ind(1)=0;
for i=1:3*level+1
    ind(i+1)=sum(lx1(1:i)); line([ind(i+1); ind(i+1)], [v(3);v(4)])
end
lL=ind(2:end);

% PRAH Z MINIMALNI CHYBY - GLOBALNI PRAHOVANI %%%%%%%%%%
q=input('Vyber druh prahovani (hard=1, soft=2): '); [cd, chyba,
threshold, thres] = prah(lL, b, l, q, level, c, A, X, wavelet);

h2=axes('Position',[0.37 0.5 0.28 0.4]);
A1=reshape(c(ind(1)+1:ind(2)),lx2(1),lx2(1)); A1=histeq(A1);
for d=1:3:3*level
    A2=reshape(c(ind(d+1)+1:ind(d+2)),lx2(d+1),lx2(d+1)); A2=histeq(A2);
    [m,n]=size(A2); A2([m-1:m],:)=22; A2(:, [n-1:n])=22;
    A3=reshape(c(ind(d+2)+1:ind(d+3)),lx2(d+2),lx2(d+2)); A3=histeq(A3);
    A3([m-1:m],:)=22; A3(:, [n-1:n])=22;
    A4=reshape(c(ind(d+3)+1:ind(d+4)),lx2(d+3),lx2(d+3)); A4=histeq(A4);
    A4([m-1:m],:)=22; A4(:, [n-1:n])=22;
    [m1,n1]=size(A1); sm1=floor((m1-m)/2)+1; sn1=floor((n1-n)/2)+1;
    A1=A1(sm1:sm1+m-1,sn1:sn1+n-1); A1([m-1:m],:)=22; A1(:, [n-1:n])=22;
    A1=[A1 A2; A3 A4];
end
[m,n]=size(A1); A1([1:2,m-1:m],:)=mean2(A1); A1(:, [1:2,n-1:n])=mean2(A1);
imshow(A1); axis tight; v=axis; title('\bf Dekompozice obrazu')
% REKONSTRUKCE %%%%%%%%%%
z1=waverec2(cd,l,wavelet);

E=A-z1;
Error=(mse(E))^0.5;
figure(1); h3=axes('Position',[0.67 0.5 0.28 0.4]);
imshow(histeq(z1));
axis tight; v=axis; title(['\bf Rekonst., RMSE - ', num2str(Error),'.'])
colormap('bone')
end
```

Obrázek 14: Algoritmus určený pro dekompozici, prahování a rekonstrukci obrazu s použitím předdefinovaných funkcí z knihovny Matlabu.

Podrobněji je algoritmus ucelen na obr. 14. Základní funkce použité v algoritmu jsou:

- `[c,l]=wavedec2(X, level, wavelet)` - rozloží matici `X` do zvolené úrovně `level` se zvolenou funkcí `wavelet`. Vznikne dekompoziční vektor `c` a matice rozkladu `l`.
- `[cd, chyba, threshold, thres]=prah(lL,b,l,q,level,c,A,X,wavelet)` - vypočítá závislost chyby na prahu `threshold`, z ní určí nejlepší práh `thres` a pomocí něj modifikuje koeficienty `c` na `cd`.

- `reshape(X,M,N)` - vrátí matici  $M \times N$  jejíž prvky jsou brány po sloupcích z matice  $X$ .
- `X=waverec2[cd,1,wavelet]` - rekonstruuje matici  $X$  z modifikovaných koeficientů `cd` s použitím wavelet funkce `wavelet`.

## 6 Závěr

Tento článek prezentuje základní přístup v odstraňování rušivých složek obrazů pomocí wavelet transformace. Výsledný obraz můžeme využít pro lepší klasifikaci obrazových informací v určitých oblastech obrazu a pro rekonstrukci chybějících částí obrazu.

Problematika zpracování signálů a obrazů zahrnuje širokou vědní disciplínu. K ní existuje celá řada knižních, časopiseckých i internetových odkazů [5, 1, 2, 3, 4]

## Reference

- [1] <http://www.amara.com/science.html>.
- [2] <http://www.wavelet.org>.
- [3] <http://dsp.rice.edu>.
- [4] <http://dsp.vscht.cz>.
- [5] Anonymous. *An Introduction to Wavelets: Wavelet versus Fourier Transform*, 2003. [http://www.amara.com/IEEEwave/IW\\_wave\\_vs\\_four.html](http://www.amara.com/IEEEwave/IW_wave_vs_four.html).
- [6] Joyce Van de Vegte. *Fundamentals of Digital Signal Processing*. Prentice Hall, Ohio, 2002.

---

Ing. Andrea Gavlasová, Prof. Aleš Procházka  
Vysoká škola chemicko-technologická, Praha  
Ústav počítačové a řídicí techniky  
Technická 1905, 166 28 Praha 6 Tel.: 00420-224 354 027, Fax: 00420-224 354 198  
E-mail: Andrea.Gavlasova@vscht.cz, A.Prochazka@ieee.org