

MODERNÍ METODY MĚŘENÍ FÁZOVÉHO ROZDÍLU - OVĚŘENÍ VLASTNOSTÍ V PROSTĚDÍ MATLAB

Michal Krumpholz, Miloš Sedláček

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická, katedra měření

1. Úvod

Článek porovnává dvě nové metody měření fázového rozdílu harmonických signálů zkreslených vyššími harmonickými složkami a aditivním šumem. Vyšetřován je zejména vliv nekoherentního vzorkování. Pro simulaci a měření bylo v MATLABu pomocí GUIDE vytvořeno grafické uživatelské rozhraní. Porovnávané metody jsou SWFR (sedmiparametrová metoda nejlepšího proložení dvojice sinusovek P.M.Ramose a jeho spoluautorů) [1] a 2PIDFT (dvoubodová interpolovaná Diskrétní Fourierova Transformace D.Agreže) [2]

2. Popis zkoumaných metod

Sedmiparametrová metoda (SWFR)

Algoritmus použitý v této metodě umožňuje určit amplitudu, stejnosměrnou složku a fázi dvou digitalizovaných sinusových signálů o stejné frekvenci.

Dva sinusové signály stejné frekvence f jsou vzorkovány vzorkovací frekvencí f_{vz} a z každého je odebráno M ekvidistantních vzorků. Hodnoty těchto M vzorků označíme: $y_{1,1}, y_{1,2}, \dots, y_{1,M}$ pro první signál a $y_{2,1}, y_{2,2}, \dots, y_{2,M}$ pro druhý signál. Každý m -tý vzorek je získán v čase $t_{k,m}$, kde $k=1,2$ je označení signálu a $m=1, \dots, M$ je číslo vzorku.

Sedmiparametrová metoda rozšiřuje základní metody popsané v [3,4].

Matrice, používající v i iteracích metodu nejmenších čtverců, ve čtyřparametrové metodě je:

$$D_{k,i} = \begin{bmatrix} w(f_{k,i}, t_{k,1}) & g(f_{k,i}, t_{k,1}) & 1 & h(A_{k,i-1}, B_{k,i-1}, f_{k,i}, t_{k,1}) \\ w(f_{k,i}, t_{k,2}) & g(f_{k,i}, t_{k,2}) & 1 & h(A_{k,i-1}, B_{k,i-1}, f_{k,i}, t_{k,2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w(f_{k,i}, t_{k,M}) & g(f_{k,i}, t_{k,M}) & 1 & h(A_{k,i-1}, B_{k,i-1}, f_{k,i}, t_{k,M}) \end{bmatrix} \quad (1)$$

kde

$$\begin{aligned} w(f, t) &= \cos(2\pi ft) \\ g(f, t) &= \sin(2\pi ft) \\ h(A, B, f, t) &= -At \sin(2\pi ft) + Bt \cos(2\pi ft) \end{aligned} \quad (2)$$

V této sedmi parametrové metodě má matice použitá v každé iteraci $2M$ řádků a 7 sloupců:

$$D_i = \begin{bmatrix} Q_{1,i} & R_{1,i} & 0 \\ 0 & R_{2,i} & Q_{2,i} \end{bmatrix} \quad (3)$$

kde

$$Q_{k,i} = \begin{bmatrix} w(f_i, k_{k,1}) & g(f_i, k_{k,1}) & 1 \\ w(f_i, k_{k,2}) & g(f_i, k_{k,2}) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w(f_i, k_{k,M}) & g(f_i, k_{k,M}) & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

a

$$R_{k,i} = \begin{bmatrix} h(A_{k,i-1}, B_{k,i-1}, f_i, t_{k,1}) \\ h(A_{k,i-1}, B_{k,i-1}, f_i, t_{k,2}) \\ \vdots \\ h(A_{k,i-1}, B_{k,i-1}, f_i, t_{k,M}) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Výsledný vektor

$$x = [A_1 \ B_1 \ C_1 \ f \ A_2 \ B_2 \ C_2]^T, \quad (6)$$

kde A a B definují amplitudu a fázi signálu, C je stejnosměrná složka signálu a f je frekvence získáme z

$$x = [D^T D]^{-1} [D^T y]. \quad (7)$$

kde D je matice poslední iterace a D^T je transponovaná matice poslední iterace.

Kritérium pro ukončení iterací je dáno relativní odchylkou frekvence Δf_i , kde $\Delta f_i < 10^{-7}$.

Dvoubodová interpolovaná Diskrétní Fourierova Transformace (2PIDFT)

Navzorkovaný analogový multifrekvenční signál $g(t)$ můžeme zapsat jako:

$$g(k\Delta t)_N = \sum_{m=0}^M A_m \sin(2\pi f_m k\Delta t + \varphi_m) \quad (8)$$

Použitím N vzorků signálu (1) je spektrální čára i v DFT dána:

$$G(i) = -j \sum_{m=0}^M A_m [W(i - \theta_m) e^{j\varphi_m} - W(i + \theta_m) e^{-j\varphi_m}] \quad (9)$$

kde θ_m je frekvence signálu podělena frekvenčním rozlišením časového okna $\Delta f = 1/(N\Delta t)$ a můžeme ji rozdělit na dvě části:

$$\theta_m = \frac{f_m}{\Delta f} = i_m + \delta_m \quad -0.5 < \delta_m \leq 0.5 \quad (10)$$

kde i_m je celočíselná hodnota a posunutí δ_m je způsobené nekoherentním vzorkováním.

Vyjádřením pouze jedné složky z výrazu (9) dostaneme:

$$G(i) = -j \frac{A_m}{2} [W(i - \theta_m) e^{j\varphi_m} - W(i + \theta_m) e^{-j\varphi_m}] \quad (11)$$

kde $W(\theta)$ je obdélníkové okno, pro které platí vztah:

$$W_{rect.}(\theta) = \frac{\sin(\pi\theta)}{N \sin(\pi\theta/N)} e^{-j\pi \left(\frac{N-1}{N}\right)\theta} \quad (12)$$

Největší DFT koeficient, který je většinou složený z příspěvků krátkodobého prosakování vyšetřované části m , můžeme odvodit ze vztahů (11) a (12) dosazením $a = \pi(N-1)/N$ a $-j = e^{-j\pi/2}$.

Pro $N \gg 1$ můžeme psát:

$$G(i_m) = \frac{A_m}{2} \left[\frac{\sin(\pi(-\delta_m))}{\pi(-\delta_m)} e^{j \left[a(\delta_m) + \varphi_m - \frac{\pi}{2} \right]} - \frac{\sin(\pi(2i_m + \delta_m))}{\pi(2i_m + \delta_m)} e^{-j \left[a(2i_m + \delta_m) + \varphi_m + \frac{\pi}{2} \right]} \right] \quad (13)$$

V případě kladného posunutí $0.5 > \delta_m \geq 0$ je druhý největší DFT koeficient roven $G(i_m+1)$. V případě záporného posunutí $0 > \delta_m \geq -0.5$ je druhý největší DFT koeficient $G(i_m-1)$. Rozdíl koeficientů obklopujících ten největší $G(i_m)$ nám určí znaménko posunutí $s = \text{sign}(|G(i_m+1)| - |G(i_m-1)|)$.

Největší postranní koeficient může být obecně vyjádřen jako:

$$G(i_m + s) = \frac{A_m}{2} \left[\frac{\sin(\pi(s - \delta_m))}{\pi(s - \delta_m)} e^{j \left[a(\delta_m - s) + \varphi_m - \frac{\pi}{2} \right]} - \frac{\sin(\pi(2i_m + s + \delta_m))}{\pi(2i_m + s + \delta_m)} e^{j \left[a(2i_m + s + \delta_m) + \varphi_m + \frac{\pi}{2} \right]} \right] \quad (14)$$

Nyní provedeme odhad fáze.

V první aproximaci zanedbáme druhé části výrazů v (13) a (14), a fázi určíme jako:

$$\varphi_m = \arg[G(i_m)] - \pi \frac{N-1}{N} \delta_m + \frac{\pi}{2} \quad (15)$$

$$\varphi_m = \arg[G(i_m + s)] + \pi \frac{N-1}{N} (s - \delta_m) + \frac{\pi}{2} \quad (16)$$

Odhad můžeme zlepšit, uvážíme-li dlouhodobé příspěvky, které mají následující vlastnosti:

$$\frac{\Delta\varphi(i_m)}{\Delta\varphi(i_m + s)} \cong \frac{\sin[\Delta\varphi(i_m)]}{\sin[\Delta\varphi(i_m + s)]} = \frac{|\Delta(i_m)| |G(i_m + s)|}{|G(i_m)| |\Delta(i_m + s)|} \quad (17)$$

$$\frac{|\Delta(i_m)|}{|\Delta(i_m + s)|} \frac{|G(i_m + s)|}{|G(i_m)|} = \frac{2i_m + s + \delta_m}{2i_m + \delta_m} \frac{|G(i_m + s)|}{|G(i_m)|} \quad (18)$$

Jestliže je $i_m \gg 1$ můžeme dát do rovnosti $|\Delta(i_m)| \approx |\Delta(i_m + s)|$ a vztah (17) můžeme napsat jako:

$$\frac{\Delta\varphi(i_m)}{\Delta\varphi(i_m + s)} \cong \frac{|G(i_m + s)|}{|G(i_m)|} \quad (19)$$

Násobením vztahů (15) a (16) korekcí (19):

$$\varphi_m = |G(i_m)| \arg[G(i_m)] - \pi \frac{N-1}{N} \delta_m |G(i_m)| + \frac{\pi}{2} |G(i_m)| \quad (20)$$

$$\varphi_m = |G(i_m + s)| \arg[G(i_m + s)] + \pi \frac{N-1}{N} (s - \delta_m) |G(i_m + s)| + \frac{\pi}{2} |G(i_m + s)| \quad (21)$$

dostaneme odhad fáze jako průměr argumentů $\arg[G(i_m)]$ a $\arg[G(i_m + s)]$:

$$\bar{\varphi}_m = \frac{|G(i_m)| \arg[G(i_m)] + |G(i_m + s)| \arg[G(i_m + s)]}{|G(i_m)| + |G(i_m + s)|} + \frac{\pi \frac{N-1}{N} [(s - \delta_m) |G(i_m + s)| - |G(i_m)|]}{|G(i_m)| + |G(i_m + s)|} + \frac{\pi}{2} \frac{|G(i_m)| + |G(i_m + s)|}{|G(i_m)| + |G(i_m + s)|} \quad (22)$$

Vztah (22) dále upravíme. Nahradíme $\pi \frac{N-1}{N} = a$ a dostaneme:

$$\bar{\varphi}_m = \frac{|G(i_m)|\arg[G(i_m)] + |G(i_m + s)|\arg[G(i_m + s)]}{|G(i_m)| + |G(i_m + s)|} + sa \left(\frac{|G(i_m + s)|}{|G(i_m)| + |G(i_m + s)|} - |\delta_m| \right) + \frac{\pi}{2} \quad (23)$$

Výsledný vztah pro fázi získáme úpravou vztahu (23) kde $\frac{|G(i_m + s)|}{|G(i_m)|} = \frac{\delta_m}{s - \delta_m}$:

$$\bar{\varphi}_m = (1 - |\delta_m|)\arg[G(i_m)] + |\delta_m|\arg[G(i_m + s)] + \frac{\pi}{2} \quad (24)$$

Ještě lepšího odhadu dosáhneme užitím vztahu (18), který upravíme do tvaru

$$\frac{\Delta\varphi(i_m)}{\Delta\varphi(i_m + s)} \cong b \frac{|G(i_m + s)|}{|G(i_m)|} \quad (25)$$

$$\text{kde } b = \frac{2i_m + s + \delta_m}{2i_m + \delta_m}.$$

Násobením vztahů (15) a (16) korekcí (25):

$$\varphi_m = |G(i_m)|\arg[G(i_m)] - \pi \frac{N-1}{N} \delta_m |G(i_m)| + \frac{\pi}{2} |G(i_m)| \quad (26)$$

$$\varphi_m = b|G(i_m + s)|\arg[G(i_m + s)] + \pi \frac{N-1}{N} (s - \delta_m) b |G(i_m + s)| + \frac{\pi}{2} b |G(i_m + s)| \quad (27)$$

dostaneme odhad fáze jako průměr argumentů $\arg[G(i_m)]$ a $\arg[G(i_m + s)]$:

$$\bar{\varphi}_m = \frac{|G(i_m)|\arg[G(i_m)] + b|G(i_m + s)|\arg[G(i_m + s)]}{|G(i_m)| + b|G(i_m + s)|} + \frac{\pi \frac{N-1}{N} [(s - \delta_m) b |G(i_m + s)| - |G(i_m)|]}{|G(i_m)| + b|G(i_m + s)|} + \frac{\pi}{2} \frac{|G(i_m)| + b|G(i_m + s)|}{|G(i_m)| + b|G(i_m + s)|} \quad (28)$$

Vztah (28) dále upravíme. Nahradíme $\pi \frac{N-1}{N} = a$ a dostaneme:

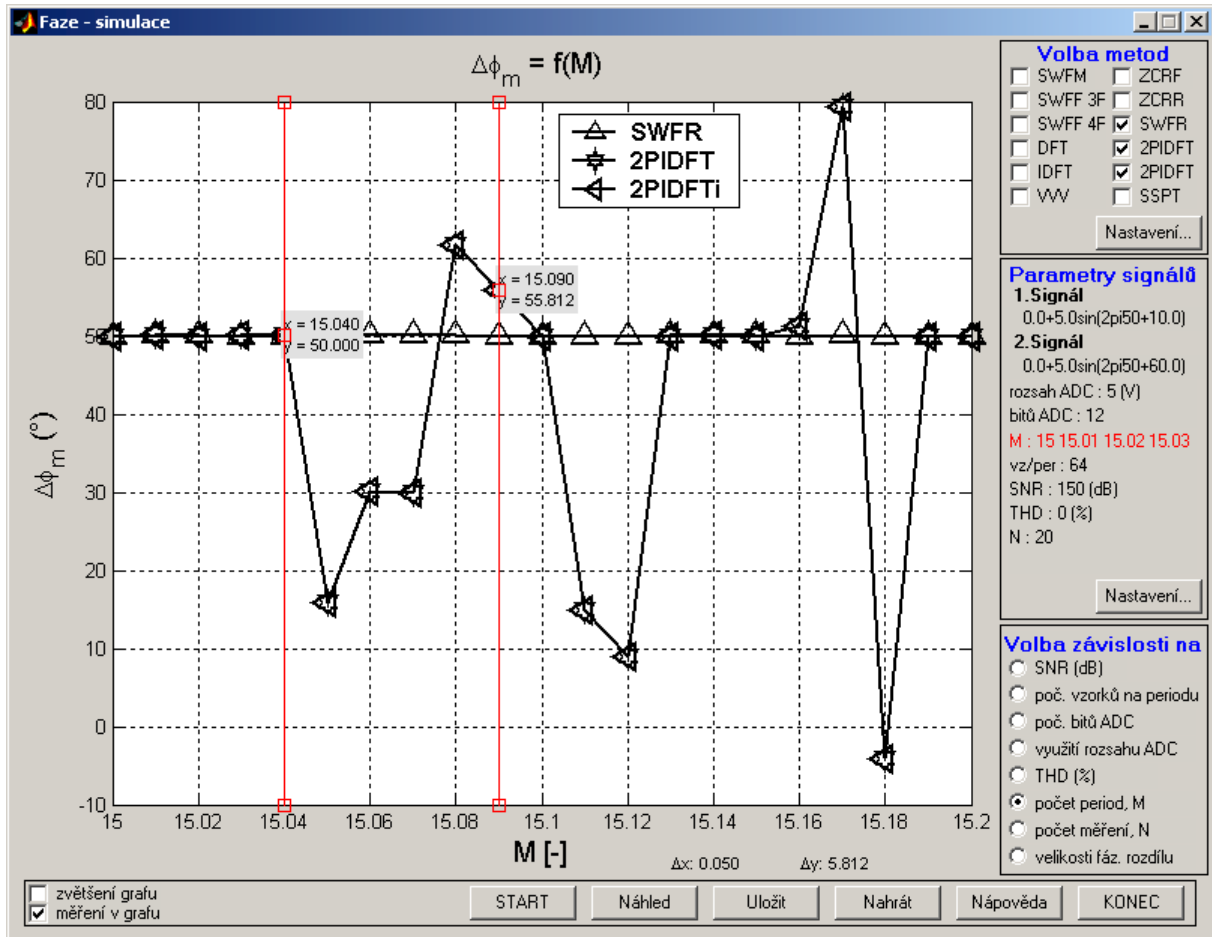
$$\bar{\varphi}_m = \frac{|G(i_m)|\arg[G(i_m)] + b|G(i_m + s)|\arg[G(i_m + s)]}{|G(i_m)| + b|G(i_m + s)|} + sa \left(\frac{b|G(i_m + s)|}{|G(i_m)| + b|G(i_m + s)|} - |\delta_m| \right) + \frac{\pi}{2} \quad (29)$$

Výsledný vztah pro fázi získáme úpravou vztahu (29) kde: $b \frac{|G(i_m + s)|}{|G(i_m)|} = b \frac{\delta_m}{s - \delta_m}$

$$\bar{\varphi}_m = \frac{(s - \delta_m)\arg[G(i_m)] + b\delta_m \arg[G(i_m + s)]}{(s - \delta_m + b\delta_m)} + \frac{a(s - \delta_m)\delta_m(1 - b)}{(s - \delta_m + b\delta_m)} + \frac{\pi}{2} \quad (30)$$

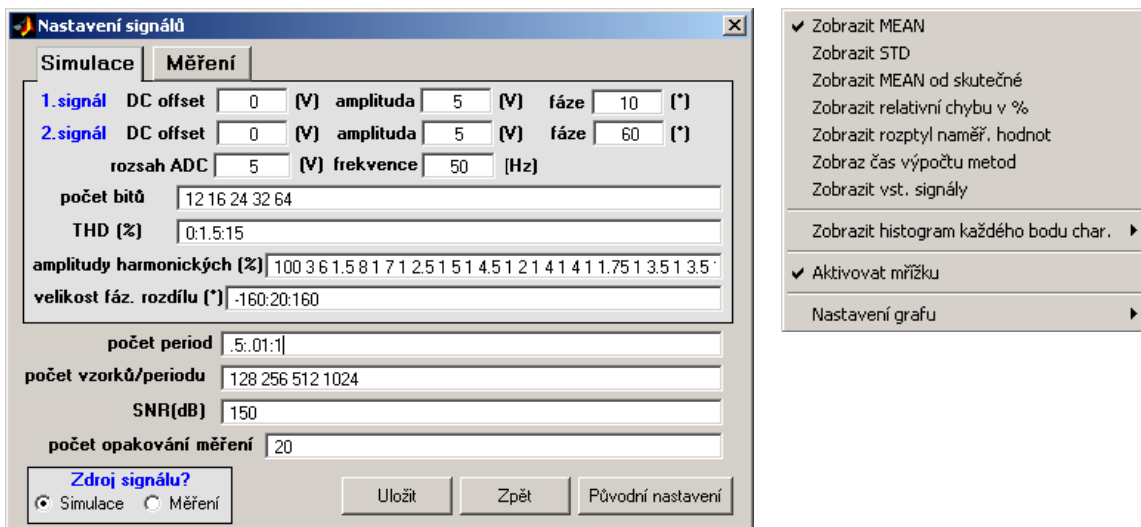
3. GUI v prostředí MATLAB

Pro zjednodušení a ulehčení práce při zadávání parametrů simulace, měření a manipulaci s výsledky bylo vytvořeno v prostředí MATLAB uživatelské rozhraní. Toto GUI je využíváno nejen pro zde uvedené metody, ale i pro další známe metody měření fázového rozdílu.



Obr.1

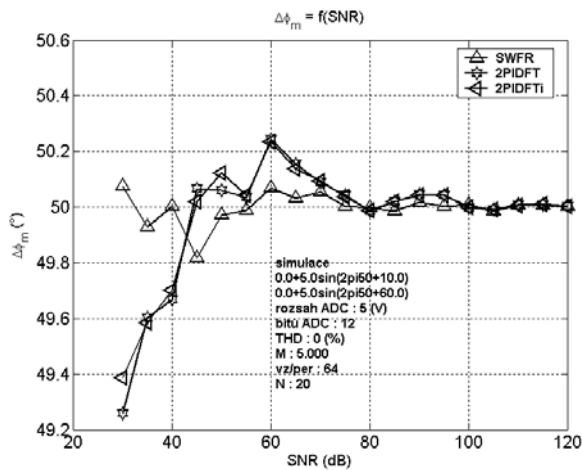
Umožňuje nastavení širokého rozsahu parametrů signálů a zpracování výsledků.



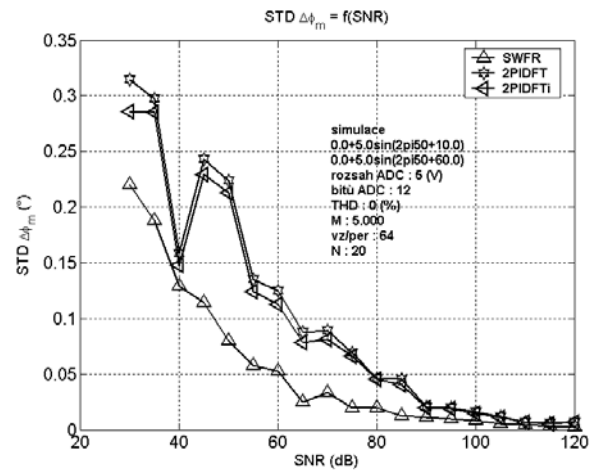
Obr.2

4. Výsledky simulací

V první fázi jsou obě metody testovány pro signál zkreslený aditivním šumem a koherentní vzorkování. U metody 2PIDFT použijeme oba výsledné výrazy (24) a (30). První je označen jako 2PIDFT, druhý jako 2PIDFTi.

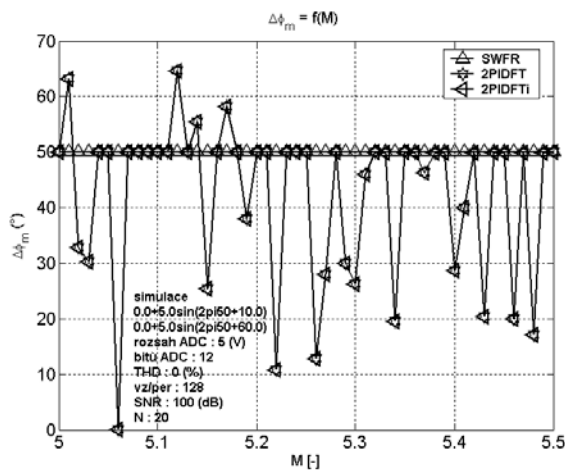


Obr.3

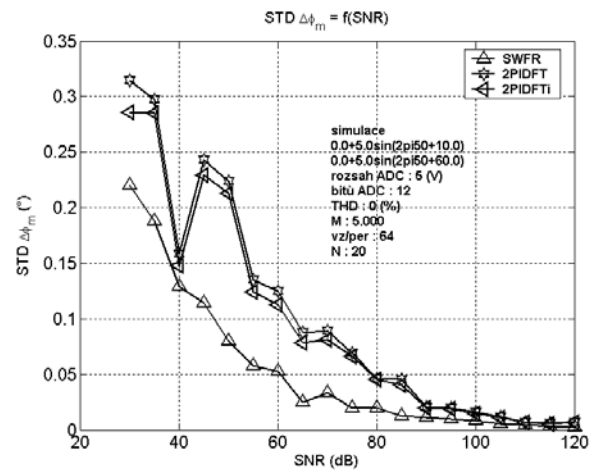


Obr.4

V druhé fázi ověříme vlastnosti metod na nekoherentně vzorkovaném signálu.



Obr.5



Obr.6

5. Závěr

Při ověřování vlastností obou metod a zejména vlivu nekoherentního vzorkování jsme dospěli k závěru:

Metoda SWR [1] prokázala dobré výsledky jak v případě koherentního tak nekoherentního signálu. Má malou výchytku i rozptýl výsledků opakovaných měření.

Metoda 2PIDFT [2] se ukázala použitelná v případě koherentního vzorkování. Pro nekoherentně vzorkovaný signál nelze tuto metodu použít (obr.5). DFT předpokládá periodické prodloužení signálu a proto dochází k rozmazání spektra.

6. Literatura

- [1] Pedro M.Ramos, Fonseca da Silva and António Cruz Serra, Improving Sine-Fitting Algorithms For Amplitude And Phase Measurement. Proc. of XVII IMEKO World Congress (CD), Dubrovnik, Croatia, June 22-27, 2003, pp.614-619
- [2] Dušan Agrež, Interpolation In The Frequency Domain To Improve Phase Measurement. Proc. of XVII IMEKO World Congress (CD), Dubrovnik, Croatia, June 22-27, 2003, pp.446-450
- [3] IEEE Std. 1057-1994 Standard For Digitizing Waveform Records, New York, Dec. 1994
- [4] IEEE Std. 1241-2000 Standard For Analog to Digital Converters, New York, Dec. 2001

Kontakt: Doc. Ing. Miloš Sedláček, CSc., e-mail: sedlaceM@feld.cvut.cz, tel: 224 352 177