OPTIMÁLNÍ FILTRACE METALURGICKÝCH SIGNÁLŮ POMOCÍ INFORMAČNÍCH KRITÉRIÍ

Jan Morávka

Třinecký inženýring, a.s.

Abstract

Příspěvek popisuje jeden přístup k optimální filtraci metalurgických signálů pomocí různých kritérií optimality. Jsou uvažována a srovnávána jak *klasická predikční kritéria* MSE, RMSE, MAE a ME, tak i *moderní*, tzv. *informační kritéria* AIC, SIC a HQ. Pro analýzu byly použity nejjednodušší filtry typu *jednoduchý klouzavý průměr* a *exponenciální filtr 0. stupně*. Tyto filtry předpokládají stacionární signál ve střední hodnotě, tj. signál s konstantním trendem, čili s konstantní střední hodnotou.

Hledání optimálních hodnot parametrů obou filtrů bylo uskutečněno v programu MATLAB, a pro srovnání, i v tabulkovém procesoru Excel.

Přístup je dokumentován na praktickém příkladu naměřených a agregovaných reálných dat z metalurgického technologického procesu zařízení plynulého odlévání oceli č.2 (ZPO 2) v Třineckých železárnách, a.s. Konkrétně je analyzován *hmotnostní tok oceli* z licí pánve (*qLP*), který má charakter stacionárního signálu (ve střední hodnotě a rozptylu).

***Verifikace* nalezených optimálních hodnot parametrů obou typů filtru byla uskutečněna srovnáním s výstupy vytvořeného *matematického modelu* hmotnostních toků oceli na ZPO 2.**

1 Úvod

Při zpracování signálů měřených a agregovaných (výpočtem stanovených) veličin na ZPO 2, které jsou dále používány pro různé *matematicko-statistické modely* a *výpočtové i řídicí moduly*, je často třeba provést *filtraci* náhodných šumů (chyby měření, teplotní, tlakové a mechanické fluktuace apod.) superponovaných (aditivně, či multiplikativně) na technologicko-technických veličinách.

Pro filtraci jsou nejčastěji používány nejjednodušší filtry typu jednoduchý **klouzavý průměr** (dále KP) nebo jednoduchý **exponenciální filtr** (dále EF, často označovaný jako exponenciální vyrovnávání, exponenciální filtr 0. stupně, 1. řádu apod.). Tyto filtry vycházejí z předpokladu filtrace tzv. TS signálů, tj. trendově stacionárních signálů (ve střední hodnotě) [ARLT 1999], které jsou tvořeny trendem polynomického charakteru (konstantním, lineárním, kvadratickým) a aditivním náhodným (tzv. „bílým“) šumem [CIPRA 1986]. Oba jmenované nejjednodušší filtry předpokládají *stacionární signál* ve střední hodnotě, tj. signál s konstantním trendem, či s konstantní střední hodnotou.

Cíl příspěvku lze definovat pomocí následující množiny souvisejících otázek:

- Která *kritéria* jsou vhodná pro optimální filtraci stacionárních signálů?
- Jaký je *vztah* mezi délkou „okna“ KP a koeficientem EF?
- Jak lze určit optimální *délku „okna“* KP?
- Lze obdobně určit optimální hodnotu *koeficientu* EF?
- Jaká je vhodnost použití programů MATLAB a Excel pro danou úlohu?

Pro ověřování přístupů byla použita naměřená a vypočtená reálná data ze ZPO 2, kromě jiného i *hmotnostní tok oceli* z licí pánve (*qLP*), který má charakter stacionárního signálu (ve střední hodnotě i rozptylu).

Jako SW nástroj k řešení problematiky byl zatím využíván všeobecně používaný a dostupný tabulkový procesor **Excel**. Podmínkou jeho použití je nainstalování *Analytických nástrojů* a v nich *Řešitele* (Solveru) ve volbě Doplňky v záložce Nástroje. Excel umožňuje stanovovat pomocí Řešitele optimální hodnotu *koeficientu filtrace* EF. Optimální délku okna KP však lze stanovit až pomocí vestavěného programovacího jazyka VBA nebo pomocí zdlouhavých výpočtů.

Ve studii je uvedeno použití matematického programu **MATLAB**, který umožňuje automatizované a velice efektivní stanovování optimálních parametrů obou typů filtrů pomocí celé množiny klasických i moderních kritérií.

2 Kritéria optimality

Pro stanovení optimálních parametrů uvedených filtračních (vyrovnávacích) modelů se používají jak *klasická*, tak *moderní* - tzv. *informační* kritéria.

Základním principem (jádrem) obou typů kritérií je minimalizace míry (funkcionálu J) střední hodnoty odchylek mezi výstupními, neboli predikovanými hodnotami filtru y(i) o *p* kroků ($p \in N$ = {1, 2, 3 ...}, nejčastěji je uvažována 1-kroková predikce, tj. p = 1) a jeho vstupními hodnotami x(i+p):

$$\boxed{J(n,p,k) = f\{\frac{1}{n-p}\sum_{i=1}^{n-p} g[y(i)-x(i+p)]\} \quad + \quad h(k,n) \quad \to \quad \min} \tag{1}$$

kde je n - počet hodnot vektorů,
p - počet kroků predikce,
f,g,h - algebraické funkce reálných proměnných,
k - (modifikovaný) počet parametrů filtrů.

V extrémním případě - bez predikce, čili s p = 0 - by došlo ke ztotožnění výstupních a vstupních hodnot filtrů, tj. filtry by ztratily účinek – koeficient exponenciální filtrace by byl rovný jedné a taktéž délka okna klouzavého průměru by byla rovna jedné. Proto je u funkcionálu *J(n,p,k)* nutná alespoň jednokroková predikce, tj. $p \geq 1$, $p \in N$.

2.1 Klasická kritéria

Mezi klasická optimalizační kritéria (která jsou funkcemi dvou parametrů *n*, *p*) patří kritéria MSE, RMSE, MAE a ME:

- **MSE** – Mean Square Error ($f \equiv 1$, $g = (\cdot)^2$, sqr, tj. druhá mocnina, $h \equiv 0$):

$$\boxed{MSE(n,p) = MSE = \frac{1}{n-p}\sum_{i=1}^{n-p}[y(i)-x(i+p)]^2} \tag{2}$$

- **RMSE** – Root Mean Square Error ($f = (\cdot)^{1/2} = \sqrt{(\cdot)}$ = sqrt, $g = (\cdot)^2$, $h \equiv 0$):

$$\boxed{RMSE = \sqrt{MSE} = \sqrt{\frac{1}{n-p}\sum_{i=1}^{n-p}[y(i)-x(i+p)]^2}}, \tag{3}$$

- **MAE** – Mean Absolute Error ($f \equiv 1$, $g = |\cdot|$ = abs($\cdot$), $h \equiv 0$):

$$\boxed{MAE = \frac{1}{n-p}\sum_{i=1}^{n-p}|y(i)-x(i+p)|}, \tag{4}$$

- **ME** – Mean Error ($f \equiv 1$, $g \equiv 1$, $h \equiv 0$):

$$\boxed{ME = \frac{1}{n-p}\sum_{i=1}^{n-p}[y(i)-x(i+p)]}. \tag{5}$$

2.2 Moderní informační kritéria

Moderní, tzv. *informační* (byly získány na základě poznatků teorie informace) optimalizační kritéria vycházejí z klasického kritéria MSE (které je funkcí parametrů *n* a *p*), přičemž obsahují *penalizační faktor* zahrnující (modifikovaný) počet parametrů filtrů *k* (u KP je *k* rovné *m*, tj. délce okna, u EF bylo nutné zavést modifikovaný, zobecněný počet parametrů, tj. modifikovanou délku okna úměrnou koeficientu filtrace: $k = m_m \sim 1/\alpha$, viz níže). Obecně to znamená, že informační kritéria jsou (na rozdíl od klasických kritérií) funkcí až tří parametrů optimalizační úlohy, neboli funkcionálu, a to parametrů *n*, *p*, *k*.

Informační kritéria jsou používaná pro široké spektrum *optimalizačních problémů*:

- optimalizace stupně regresního polynomu [ANDĚL 1993], [MELOUN & MILITKÝ 1994],
- optimalizace řádů modelů ARMA a ARIMA [ARLT 1999], [CIPRA 1986],
- optimalizace řádů VAR modelů [ARLT 1999],
- optimalizace výběru a počtu regresorů u vícenásobné lineární regrese [MELOUN & MILITKÝ 1994],
- optimalizace výběru a počtu regresorů u dynamických lineárních regresních modelů [CIPRA 1986].

K informačním kritériím náleží následující nejčastěji používané (bývají uvedena v multiplikativním a po logaritmování i v *aditivním* tvaru – tak uvedeno dále a použito v m-funkcích programu MATLAB):

- **AIC** – Akaikeovo (Akaikeho) informační kritérium : Akaike’s Information Criterion:

$$\boxed{AIC(n,p,k) = AIC = \ln(MSE) + \frac{2k}{n}}. \tag{6}$$

  Toto kritérium však obecně nad/podhodnocuje odhad velikosti parametrů *k* a proto byly vyvinuty jeho různé modifikace se snahou o eliminaci přeurčení – viz např. [ARLT 1999], [CIPRA 1986],

- **SIC** – Schwarzovo (Schwarz-Bayesovo, Rissanenovo) informační kritérium:

$$\boxed{SIC = \ln(MSE) + \frac{k\ln(n)}{n}}, \tag{7}$$

- **HQ** – (HQC) Hannan-Quinnovo informační kritérium (s doporučenou volbou c > 1, ve vytvořených m-funkcích je použito c = 2):

$$\boxed{HQ = \ln(MSE) + \frac{2k\cdot c\cdot \ln(\ln(n))}{n}}. \tag{8}$$

Všechna uvedená (klasická a moderní) kritéria byla použita ve vytvořených m-funkcích *kp_opt* (optimální KP) a *ef_opt* (optimální EF) systému MATLAB.

3 Vztah mezi parametry KP a EF

Vztah pro výpočet tzv. jednoduchého (se stejnými váhami hodnot) klouzavého průměru (KP) má jednoduchý tvar (kde *m* je délka „okna“ KP, *n* je počet hodnot vstupního vektoru *x*):

$$y_{KP}(j) = \frac{1}{m}\sum_{i=j-m+1}^{j} x(i), \quad j = m \ldots n, \quad m = 1, 2, 3, \ldots n\ . \tag{9}$$

Pro exponenciální filtr 0.stupně (EF - vhodný pro stacionární signál ve střední hodnotě) platí iterační vztah:

$$y_{EF}(i) = \alpha\cdot x(i) + (1-\alpha)\cdot y_{EF}(i-1), \quad y(1) = x(1), \quad i = 2 \ldots n\ . \tag{10}$$

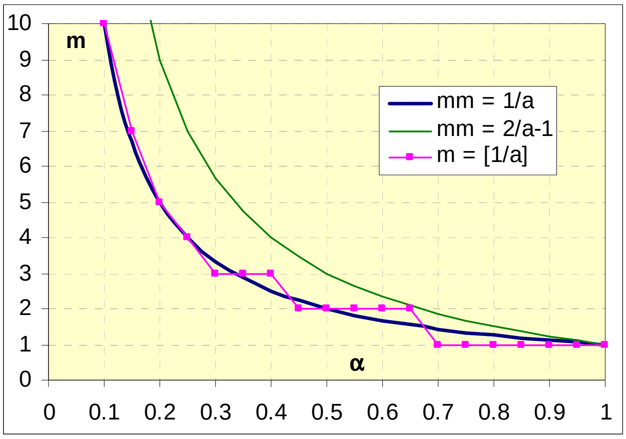
V literatuře [VÍTEČEK & WAWRZICZKOVÁ 1988], [GROS 2003] je odvozen jednoduchý asymptotický (platný pro velké *m*) převodní vztah (symbol [.] označuje zaokrouhlení na celá, či v daném případě na přirozená čísla):

$$\boxed{\alpha \approx \frac{1}{m} \quad \Rightarrow \quad m_m = k = \frac{1}{\alpha}, \quad m = \left[\frac{1}{\alpha}\right]}. \tag{11}$$

V literatuře [CIPRA 1986] je prezentován obdobný vztah vycházející z četných simulací:

$$\boxed{\alpha \approx \frac{2}{m+1} \quad \Rightarrow \quad m_m = k = \frac{2}{\alpha} - 1, \quad m = \left[\frac{2}{\alpha} - 1\right]}. \tag{12}$$

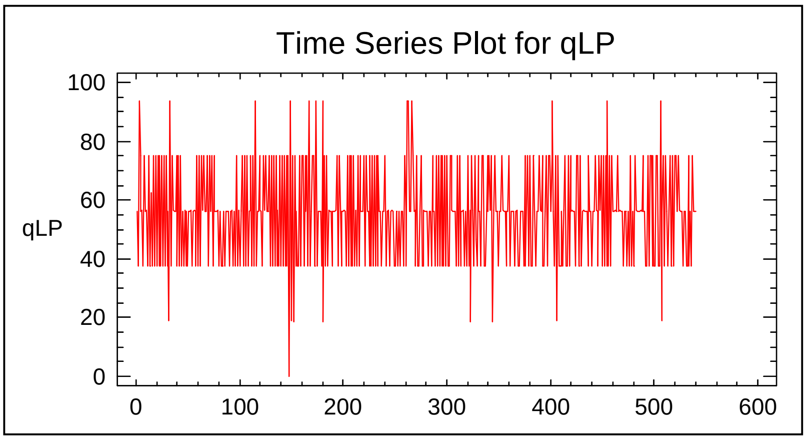
Na *obr.1* je ukázáno grafické znázornění obou převodních vztahů mezi parametry KP a EF:



Obr. 1. Závislost m_m (klouzavý průměr) na α (exponenciální filtrace)

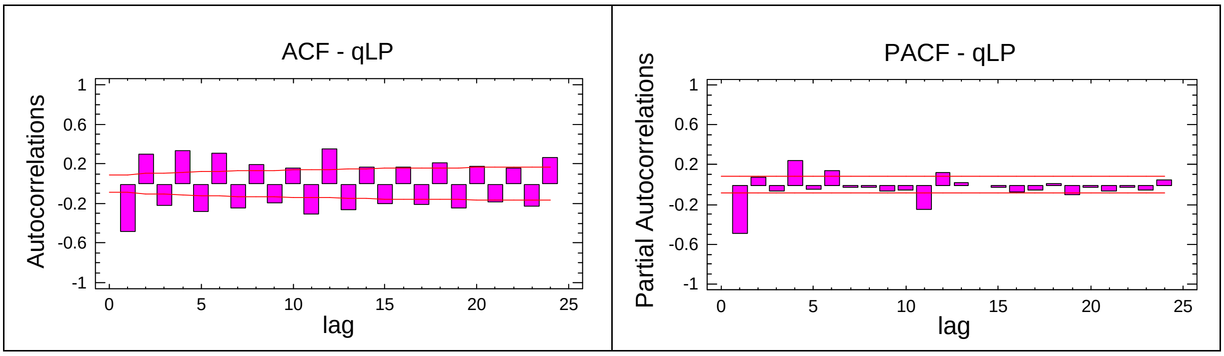
4 Hmotnostní tok oceli z licí pánve

Hmotnostní tok oceli z licí pánve **qLP** (v jednotkách [kg/s]) byl vypočten jako první relativní zpětná diference z periodicky měřených hodnot hmotnosti oceli v LP – viz *obr.2* (ZPO 2, 10.9.2004, 6:05-6:50):



Obr. 2. Hmotnostní tok qLP [kg/s] na ZPO 2

Autokorelační (ACF) a parciální autokorelační funkce (PACF) signálu qLP je viditelná na následujícím *obr.3*:

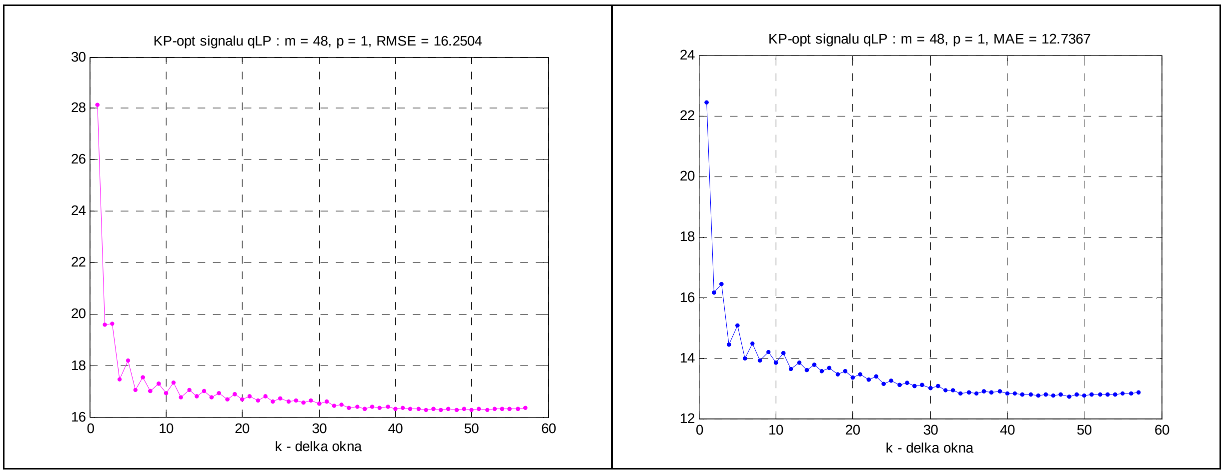


Obr. 3. ACF a PACF hmotnostního toku qLP na ZPO 2

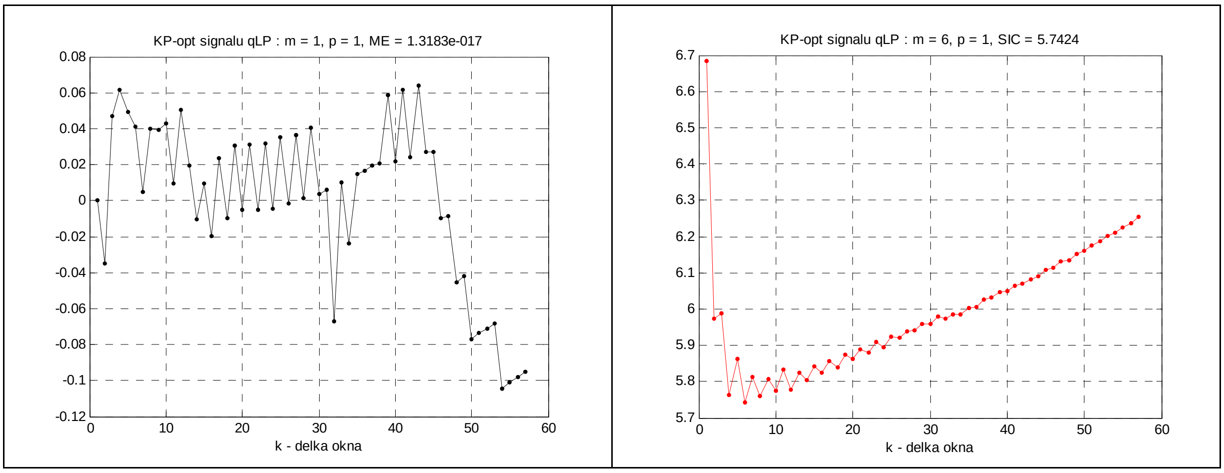
Jak je z obrázku a hodnot korelačních funkcí zřejmé, signál *qLP* má charakter časové řady typu AR(1) s poměrně velkým záporným koeficientem autokorelace 1. řádu $\rho_1 \approx -0{,}49$ [CIPRA 1986], [ARLT 1999].

4.1 Optimální klouzavý průměr signálu qLP

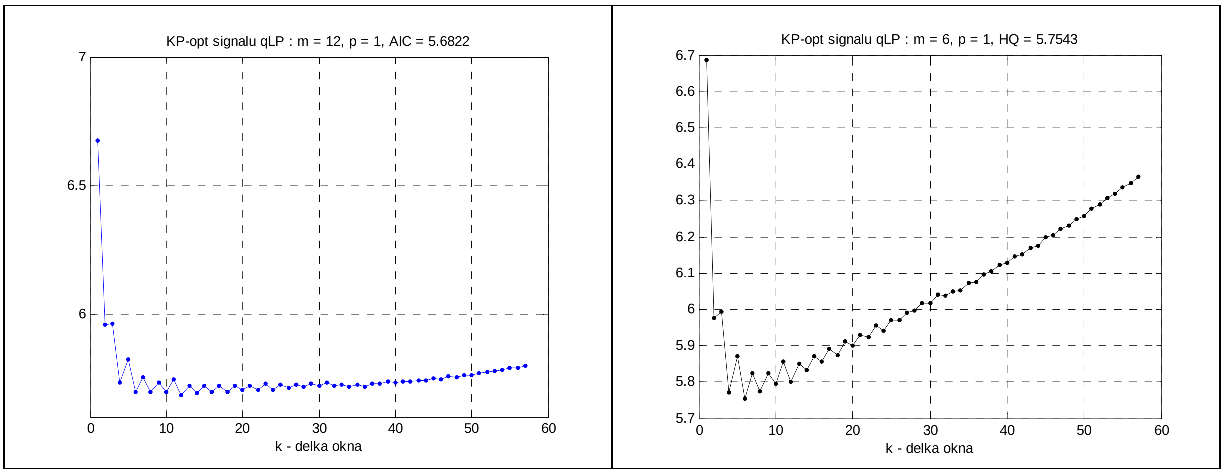
Průběhy hodnot kritérií RMSE, MAE, ME, SIC, AIC a HQ v závislosti na délce okna KP (optimální délka „okna“ je označena *m*), generované vytvořenou m-funkcí *kp_opt* (v programu MATLAB) pro predikci o jeden krok (p = 1), jsou pro signál *qLP* uvedeny na *obr.4, 5, 6*:



Obr. 4. Průběh kritérií RMSE (m = 48) a MAE (m = 48) pro KP signálu qLP

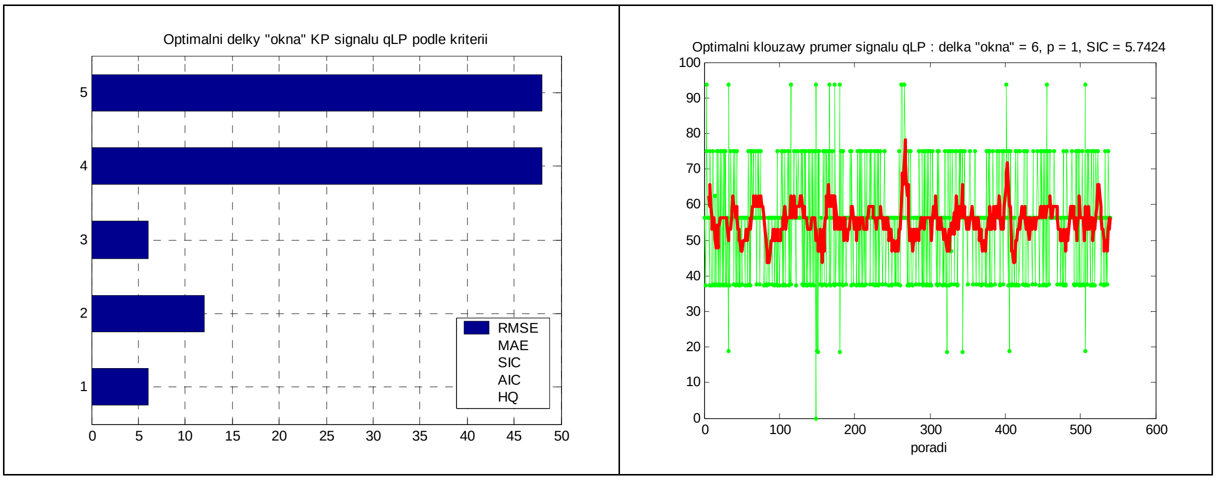


Obr. 5. Průběh kritérií ME (m = 1) a SIC (m = 6) pro KP signálu qLP



Obr. 6. Průběh kritérií AIC (m = 12) a HQ (m = 6) pro KP signálu qLP

Porovnání hodnot kritérií se stanovením nalezených optimálních délek „okna“ KP a průběh signálu *qLP* včetně KP s optimální délkou okna m = 6 (stanovenou podle kritéria SIC) je viditelné na *obr.7*:



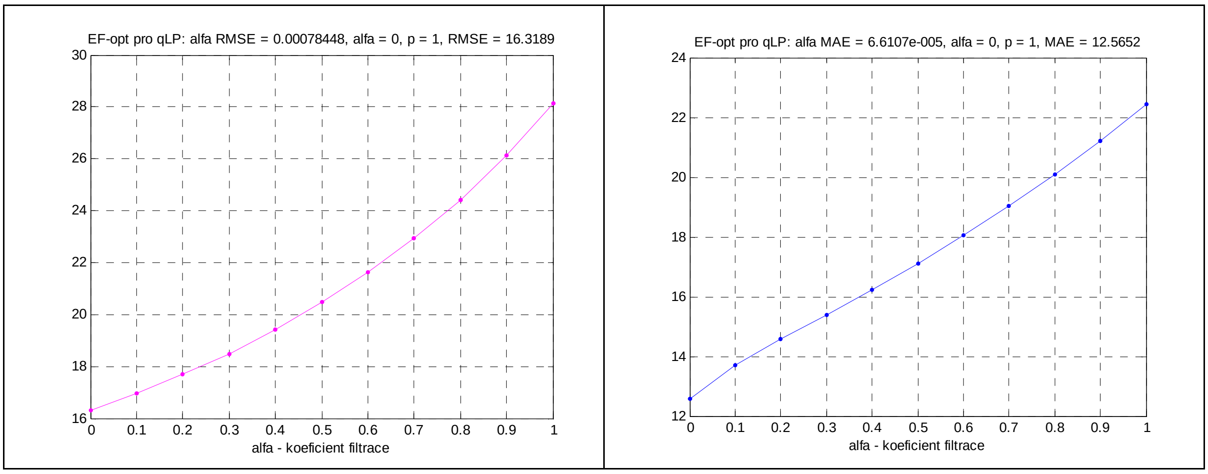
Obr. 7. Porovnání kritérií a průběh signálu qLP včetně jeho KP s m = 6 (dle kritéria SIC)

Hodnocení:

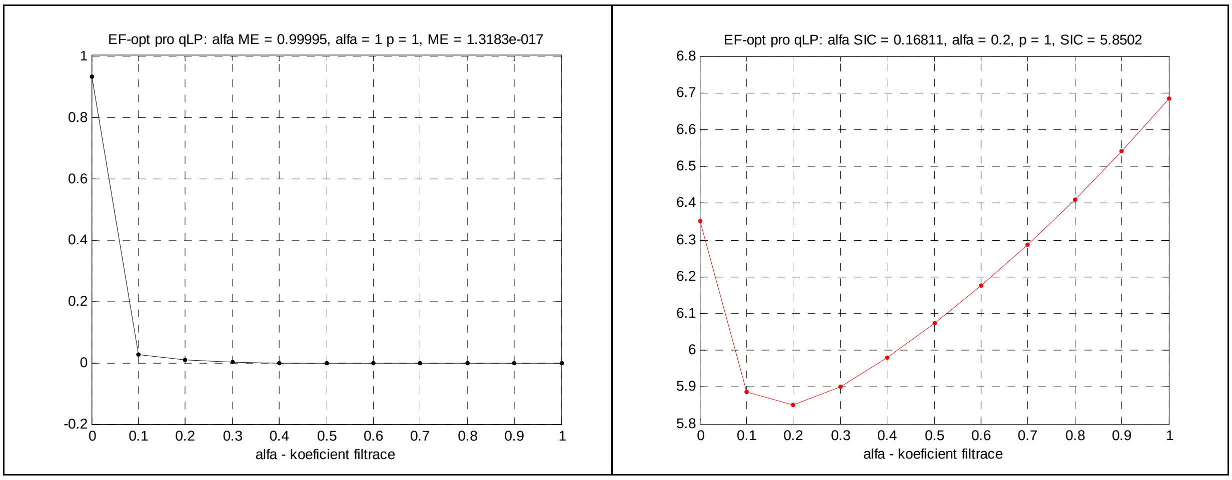
- ❑ kritérium ME je pro KP signálu *qLP* nepoužitelné,
- ❑ informační kritéria SIC, AIC a HQ stanovili asi 4-8 krát menší hodnoty optimální délky okna (*m*) KP než klasická kritéria RMSE a MAE,
- ❑ kritéria SIC a HQ stanovili optimální hodnotu délky okna *m* = 6, která je stejná jako hodnota zjištěná pomocí srovnání výsledků *matematického modelu* hmotnostních toků a reálných dat [MORÁVKA, J. 2004b]. U kritéria AIC došlo k typickému „přeurčení“ délky okna. Obecně se však potvrdila vhodnost uvedených informačních kritérií, přičemž jako referenční je v m-funkci *kp_opt* používáno kritérium SIC, které se jeví nejspolehlivější (u kritéria HQ jsou jeho hodnoty a průběh závislé na volbě konstanty c, která byla v uvažovaném případě stanovena na c = 2).

4.2 Optimální exponenciální filtrace signálu qLP

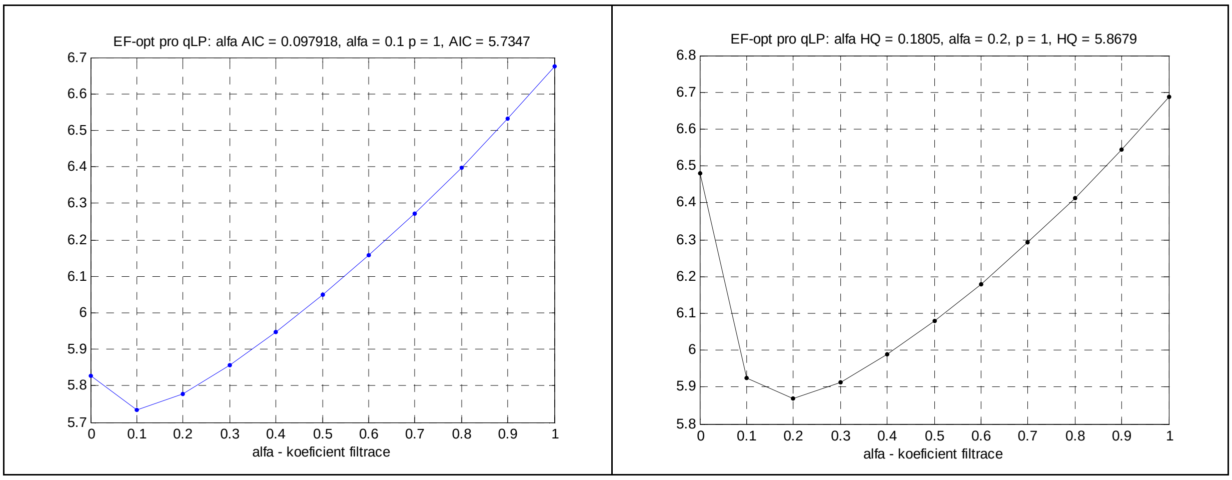
Průběhy hodnot kritérií RMSE, MAE, ME, SIC, AIC a HQ v závislosti na koeficientu *alfa* EF, generované vytvořenou m-funkcí *ef_opt* pro predikci o jeden krok (p = 1) signálu qLP, jsou uvedeny na *obr.8, 9, 10*:



Obr. 8. Průběh kritérií RMSE (alfa = 0.0008) a MAE (alfa = 0.00007) pro EF signálu qLP

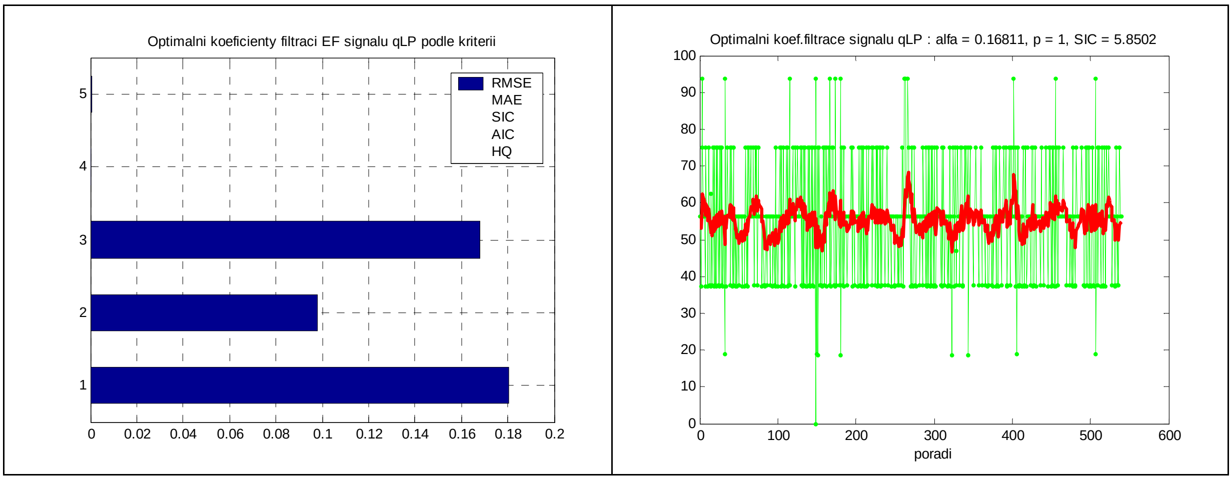


Obr. 9. Průběh kritérií ME (alfa = 1.0) a SIC (alfa = 0.168) pro EF signálu qLP



Obr. 10. Průběh kritérií AIC (alfa = 0.098) a HQ (alfa = 0.181) pro EF signálu qLP

Porovnání hodnot kritérií se stanovením nalezených optimálních koeficientů filtrace EF a průběh signálu qLP včetně EF s optimální hodnotou koeficientu *alfa* = **0.168** (stanovenou podle kritéria SIC) je na *obr.11*:



Obr. 11. Porovnání kritérií a průběh signálu qLP pro EF s alfa = 0.168 (dle kritéria SIC)

Hodnocení:

- kritérium ME je v případě EF pro signál *qLP* nepoužitelné,

- informační kritéria SIC, AIC a HQ stanovili použitelné hodnoty koeficientů exponenciální filtrace, zatímco klasická kritéria RMSE a MAE selhala – jimi nalezené koeficienty exponenciální filtrace jsou blízké nule, co znamená velice „zatvrdlou“ filtraci rovnou přibližně střední hodnotě signálu,
- kritérium SIC stanovilo optimální koeficient EF $\alpha \approx 0.168$, který velice přesně odpovídá hodnotě stanovené pomocí srovnání výsledků *matematického modelu* hmotnostních toků a reálných dat [MORÁVKA, J. 2004b]. Kritérium HQ stanovilo o něco vyšší, avšak poměrně dobrou hodnotu $\alpha \approx 0.181$ (při volbě c = 2). U kritéria AIC došlo k (pro něj typickému) podhodnocení koeficientu. Opět se tedy potvrdila vhodnost a lepší použitelnost (v porovnání s klasickými kritérii) uvedených informačních kritérií, přičemž jako referenční je v m-funkci *kp_opt* používáno kritérium SIC.

4.3 Porovnání obou filtrací u signálu qLP

Získané výsledky optimálních hodnot parametrů KP a EF pro predikci o 1 krok (p = 1) u signálu *qLP* jsou uvedeny v *tab.1*:

Tab. 1. SROVNÁNÍ OPTIMÁLNÍCH HODNOT PARAMETRŮ FILTRACE U SIGNÁLU QLP

Filtr	***Parametr***	***Kritéria***					
		Klasická			***Moderní - informační***		
		RMSE	***MAE***	***ME***	***SIC***	***AIC***	***HQ***
KP	m	48	48	1	**6**	12	**6**
EF	α	0.0008	0.00007	1.0	**0.168**	0.098	*0.181*

Hodnocení:

- Moderní *informační kritéria* se u signálu qLP jeví jednoznačně lépe (poskytují použitelné výsledky) než *kritéria klasická*, která v tomto případě úplně selhala.
- Nejlepší a nejrobustnější se jeví kritérium SIC.

5 Závěr

Na závěr je možné konstatovat následující skutečnosti:

1. *Informační kritéria* (AIC, SIC, HQ) umožňují *spolehlivěji*, *správněji a přesněji určit* optimální hodnoty parametrů obou filtrů než *klasická kritéria* (RMSE, MSE, MAE, ME). Jako nejlepší a nejrobustnější se jeví informační kritérium SIC. Dalším použitelným kritériem je HQ, které je však závislé na volbě parametru c. Kritérium AIC poskytuje (pro něj typické) podhodnocené nebo nadhodnocené hodnoty parametrů.
2. Mezi délkou okna jednoduchého klouzavého průměru (m) a koeficientem exponenciální filtrace 0.stupně (α) se osvědčily dva jednoduché *vztahy*:

$$\alpha \approx \frac{1}{m} \quad \Rightarrow \quad m = \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor,$$

$$\alpha \approx \frac{2}{m+1} \quad \Rightarrow \quad m = \left\lfloor \frac{2}{\alpha} - 1 \right\rfloor.$$

3. V programu **Excel** lze jednoduše a spolehlivě určovat optimální hodnoty koeficientů *exponenciální filtrace* pomocí aplikace Řešitel (Solver). Určení optimální délky okna *klouzavého průměru* je zde obtížné (neobejde se bez programování ve VBA), a proto *odhad* intervalu optimálních délek okna lze jednoduše stanovit *přepočtem* pomocí výše uvedených vztahů ze zjištěné optimální hodnoty koeficientu exponenciální filtrace.

4. V programu **MATLAB** je situace spíše opačná: velice jednoduše a rychle lze naprogramovat m-funkci pro stanovení optimálního *klouzavého průměru*. U m-funkce pro stanovení optimálního koeficientu exponenciální filtrace je situace poněkud obtížnější – pro hledání optima je třeba použít funkci *fminbnd* a připravit pro ni funkce pro všechna kritéria za použití globálních proměnných (a přitom počítat s problémy, které kolem nich vznikají). I v tomto případě by bylo vhodnější stanovit optimální délku „okna“ klouzavého průměru a *přepočtem* určit z ní interval optimálních hodnot koeficientu exponenciální filtrace.

Literatura

[1] ANDĚL, J. 1993. *Statistické metody.* 1.vyd. Praha : Matfyzpress MFF UK Praha, 1993. 246 s.

[2] ARLT, J. 1999. *Moderní metody modelování ekonomických časových řad.* 1.vyd. Praha: Grada Publishing, s.r.o., 1999. 312 s. ISBN 80-7169-539-4.

[3] CARLBERG, C. 2004. *Analýza podnikání s programem Microsoft Excel.* Praha : SoftPress, 2004, 544 s.

[4] CIPRA, T. 1986. *Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii.* Praha : SNTL, 1986, 248 s.

[5] GROS, I. 2003. *Kvantitativní metody v manažerském rozhodování.* 1. vyd. Praha : Grada Publishing, a.s., 2003. 432 s. ISBN 80-247-0421-8.

[6] MELOUN, M. & MILITKÝ, J. 1994. *Statistické zpracování experimentálních dat.* 1.vyd. Praha : PLUS, 1994. 839 s. ISBN 80-85297-56-6.

[7] MORÁVKA, J. 2004a. *Matematický model hmotnostních toků oceli na ZPO 2.* Případová studie 3. etapy projektu 3004001. Třinec : Třinecký inženýring, a.s., září 2004. 6 s.

[8] MORÁVKA, J. 2004b. *Optimální filtrace hmotnostního toku oceli z licí pánve na ZPO 2.* Případová studie 4. etapy projektu 3004001. Třinec : Třinecký inženýring, a.s., říjen 2004. 9 s.

[9] MORÁVKA, J. 2004c. *Optimální filtrace signálů na ZPO pomocí jednoduchého klouzavého průměru a exponenciálního filtru 0. stupně.* Případová studie 3. etapy projektu 3004005. Třinec : Třinecký inženýring, a.s., listopad 2004. 13 s.

[10] VÍTEČEK, A. & WAWRZICZKOVÁ, M. 1988. *Teorie automatického řízení.* Ostrava : skripta PGS VŠB Ostrava, 1988. 175 s.

Ing. Jan Morávka, Ph.D.
739 61 Třinec – Staré město, Frýdecká 126, e-mail: jan.moravka@tzi.trz.cz, tel.: 558 53 2192