

# PRŮTOK PLYNU OTVOREM

P. Škrabánek, F. Dušek

Univerzita Pardubice, Fakulta chemicko technologická  
Katedra řízení procesů a výpočetní techniky

## Abstrakt

Článek se zabývá ověřením použitelnosti Saint Vénantovy – Wantzelovy rovnice popisující průtok reálného plynu nerozšiřující se dýzou pro konkrétní zařízení. Sledovaná část zařízení je tvořena uzavřenou nádobou s protékající vodou. Prostor nad hladinou je spojen malým otvorem s okolím. Změny v průtoku kapaliny vyvolávají změnu hladiny a tedy snížení či zvýšení tlaku a v konečném důsledku průtok plynu otvorem oběma směry. Na zařízení je měřena výška hladiny, relativní tlak nad hladinou a absolutní tlak vzduchu v okolí.

Pomocí matematicko fyzikální analýzy byla sestavena nelineární diferenciální rovnice prvního řádu popisující tlak plynu nad hladinou v daném systému. Tato rovnice byla realizována ve formě modelu SIMULINKu. Dále byly z experimentálních dat numerickou optimalizací (funkce MATLABu `fminsearch` využívající model SIMULINKu) určeny hodnoty dva parametrů diferenciální rovnice, jejichž hodnoty nejsou přesně známy.

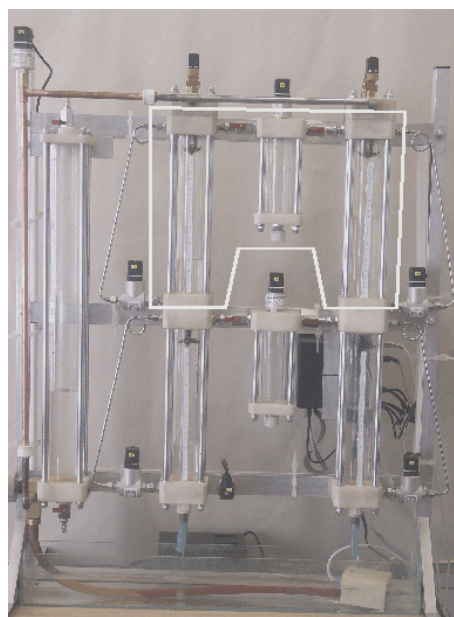
Použitelnost zmíněných rovnic je posuzována subjektivně na základě shody naměřených a vypočtených časových průběhů tlaků vzduchu nad hladinou pro různé časové průběhy změny výšky hladiny.

## 1 Úvod

V rámci projektu GAČR 102/03/0625 – *Konsorciální přístup k vývoji experimentálních modelů* – bylo na Katedře řízení procesů a výpočetní techniky FCHT Univerzity Pardubice navrženo a realizováno zařízení „Hydraulicko pneumatická soustava“ (HPS, viz obrázek 1) představující dvourozměrnou soustavu určenou pro praktické ověřování vícerozměrového řízení [Macháček 2004]. Pro návrh kvalitního řízení je nutná informace o řízeném systému – v případě řízení procesů počítačem obvykle ve formě matematického modelu. Tento model by měl popisovat dynamické chování (časový průběh) vybraných veličin odpovídající co nejvěrněji průběhu veličin reálného zařízení. Celé zařízení se rozdělí na jednotlivé subsystémy, pro které se sestavují a ověřují modely samostatně. Tento příspěvek se zabývá popisem chování subsystému uzavřeného pneumatického systému s proměnným objemem, konkrétně popisem průtoku vzduchu malým otvorem založeným na Saint Vénantově – Wantzelově rovnici. Komplikací je nemožnost přímého měření průtoku vzduchu. Proto je využita možnost nepřímého měření pomocí průběhu tlaku vzduchu v pneumatickém prostoru. Tento přístup je výhodný i proto, že pro použití v celkovém modelu je potřebný právě časový průběh tlaku vzduchu.

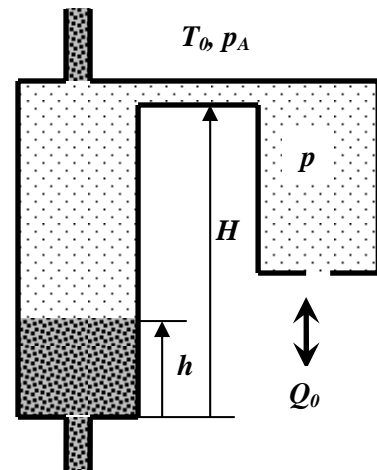
## 2 Popis zařízení

Vzájemné ovlivňování hladin v nádržích zajišťují dva pneumatické prostory (propojený prostor nad hladinami ve dvou nádržích, viz označená oblast na obrázku 1). Schématické znázornění jednoho prostoru pro potřeby odvození matematického



obrázek 1 Fotografie HPS

modelu je na obrázku 2. Celkový objem je rozdělen na hydraulický prostor (o konstantním průřezu  $S$  a výšce  $H$ ), kde se může měnit výška hladina kapaliny  $h$  a na pneumatický prostor jehož objem je tvořen konstantním objemem  $V_0$  a objemem závislým na aktuální výšce hladiny. Pneumatický prostor je malým otvorem (clonou) o ploše  $s_0$  propojen s okolím. To znamená, že při změnách výšky hladiny  $h$  dochází ke změnám tlaku  $p$  a tudíž k průtoku (hmotový průtok  $Q_0$ ) vzduchu clonou buď ven nebo dovnitř pneumatického prostoru pokud se nevyrovná tlak  $p$  s okolním tlakem  $p_A$ . Pro tvorbu matematického modelu dynamického chování tlaku vzduchu  $p$  je nutná znalost popisu průtoku vzduchu clonou  $Q_0$ .



Obrázek 2: Schéma pro matematický model

### 3 Cíl práce

Rovnice popisující průtok plynu clonou je poměrně komplikovaná a vyžaduje modifikaci při změně směru proudění plynu. Zásadní otázkou ale je, zda podmínky na konkrétním zařízení odpovídají předpokladům, za kterých je rovnice odvozena. Zda malé rozdíly tlaků v kombinaci s chybou měření, nedefinovaný tvar clony, jiná vlhkost vzduchu uvnitř a venku, uvažování stejné a konstantní teploty uvnitř a vně nezpůsobí, že skutečné průběhy tlaku se budou lišit od průběhů vypočítaných na základě této rovnice.

### 4 Matematický model

V následující kapitole je uvedeno stručné odvození algebraické rovnice popisující hmotový průtok plynu clonou a diferenciální rovnice popisující časový průběh tlaku plynu v pneumatické části. Důraz je kladen na fyzikální představu, ze které se vychází a formulaci předpokladů, za kterých jsou rovnice odvozeny. V případě popisu tlaku plynu se respektuje konkrétní geometrické uspořádání podle obrázku 2.

#### 4.1 Hmotový průtok plynu clonou

Rovnice pro hmotový průtok plynu vychází z Saint Vénantovy – Wantzelovy rovnice popisující ustálenou podkritickou rychlost ideálního plynu v nerozšiřující se trysce za předpokladu beztrátového proudění. Podrobné odvození vycházející z fyzikální podstaty je např. v literatuře [Čermák 1968]. Podobné odvození a zejména diskuse platnosti s ohledem na kritický stav plynu je v [Nožička 2001]. Poněkud modifikovaný tvar je uveden také v [Ower 1996].

V článku je provedeno alespoň stručné odvození Saint Vénantovy – Wantzelovy rovnice. Vychází se ze zákona zachování energie. Za předpokladu, že se jedná o proudění adiabatické bez získávání mechanické práce, má rovnice bilancující energii ve dvou místech proudícího plynu tvar

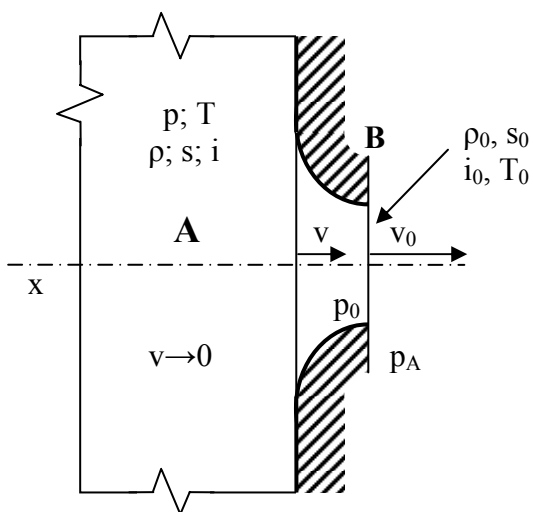
$$Q \left[ u_1 + \frac{1}{2} \cdot v_1^2 + g \cdot h_1 \right] + p_1 \cdot S_1 \cdot v_1 = Q \left[ u_2 + \frac{1}{2} \cdot v_2^2 + g \cdot h_2 \right] + p_2 \cdot S_2 \cdot v_2 \quad (1)$$

kde:

$u_i$ – vnitřní energie	$h_i$ – výška	$S_i$ – plocha průřezu potrubí
$v_i$ – rychlost proudění plynu	$p_i$ – tlak plynu	$Q$ – hmotnostní tok plynu
$g$ – tíhové zrychlení		

Je-li místo odkud plyn vytéká dostatečně rozměrné, je rychlost v dostatečné vzdálenosti od výtokového otvoru nulová. Energetická bilance se provádí pro místa, které jsou ve stejné výšce. Systém splňující tuto představu je zachycen na obrázku Obrázek 3. Veličiny popisující nádobu, ze které plyn odtéká (místo označené na obrázku jako A), jsou bez indexu. Druhým

místem, pro které se energetická bilance provádí, je místo zúžení. To je na obrázku označené písmenem B.



kde:

$s_i$  - plocha průřezu  
 $\rho_i$  - hustota plynu  
 $i_i$  - entalpie plynu  
 $v$  - rychlost proudění plynu v nádrži  
 $v_0$  - rychlost proudění plynu v bodě B  
 $p$  - tlak plynu v nádrži  
 $p_0$  - tlak plynu v bodě B  
 $p_A$  - tlak plynu v okolí  
 $T$  - teplota plynu v nádrži

Obrázek 3: Průřez místem výtoku a okolím

V energetické bilanci se vyskytuje vnitřní energie  $u$ . Ta je závislá na entalpii  $i$ , tlaku plynu  $p$  a hustotě plynu  $\rho$  dle vztahu

$$u = i - \frac{p}{\rho} \quad (2)$$

Využije-li se rovnice kontinuity

$$Q = v_i \cdot S_i \cdot \rho_i \quad (3)$$

a vztahu pro výpočet vnitřní energie (2) pro úpravu energetické bilance mezi místem A a B (viz Obrázek 3), získá energetická bilance nový tvar

$$i = i_0 + \frac{1}{2} \cdot v_0^2 \quad (4)$$

Dalšími úpravami energetické bilance, při využití vztahu pro výpočet entalpie

$$i = c_p \cdot T \quad (5)$$

vztahu pro výpočet závislosti měrné tepelné kapacity  $c_p$  na  $\kappa$  a  $R$

$$c_p = \frac{\kappa \cdot R}{\kappa - 1} \quad (6)$$

a Poissonova vztahu

$$\frac{T_0}{T} = \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (7)$$

se získá vztah pro rychlost proudění ideálního plynu v místě zúžení

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa \cdot R}{\kappa - 1} \cdot T_0 \cdot \left( 1 - \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right)} \quad (8)$$

který se nazývá Saint Vénantova – Wantzelova rovnice.

Pro odvození rovnice popisující hmotnostní průtok plynu zúženým místem  $Q_0$  se vychází z rovnice kontinuity (3). Odvozování se provádí pro situaci zachycenou na obrázku Obrázek 3. Rovnice kontinuity se aplikuje na místo v trysce označené na obrázku písmenem B. V tomto místě je plocha průřezu  $s_0$ , hustota plynu  $\rho_0$ , tlak plynu  $p_0$  a rychlost plynu  $v_0$ .

Odvozování vztahu se provádí pro podzvukové rychlosti, kde platí  $p_0 = p_A$ . Takto vyjádřená rovnice kontinuity se upraví pomocí stavové rovnice ideálního plynu

$$p = \rho \cdot R \cdot T \quad (9)$$

rovnice pro výpočet rychlosti proudění plynu (8) (Venantova – Wantzelova rovnice) a Poissonova vztahu (7). Výsledný vztah pro výpočet hmotnostního průtoku plynu při výtoku ze soustavy má tvar

$$Q_0 = \frac{s_0}{R} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa \cdot R}{\kappa - 1} \cdot \frac{1}{T_0} \cdot p \cdot p_0 \left[ \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{2}{\kappa} - 1} - \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \right]} \quad (10)$$

Konstanta  $\chi$  ovšem platí pro ideální plyn. Nahradí se proto konstantou  $m$ , platící pro reálný plyn. Výsledná rovnice popisující hmotnostní průtok reálného plynu při výtoku ze soustavy má tvar

$$Q_0 = \frac{s_0}{R} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{m \cdot R}{m - 1} \cdot \frac{1}{T_0} \cdot p \cdot p_0 \left[ \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{2}{m} - 1} - \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{m}} \right]} \quad (11)$$

## 4.2 Tlak plynu v pneumatickém objemu

Rovnice popisující chování tlaku plynu v prostoru s proměnným objemem (viz obrázek 2) vychází z hmotnostní bilance plynu. Bilance se provádí pro výtok plynu ze soustavy.

$$0 = Q_0(t) + \frac{dm}{dt} \quad (12)$$

Člen vyjadřující zádrž hmoty v soustavě se upraví pomocí vztahu pro výpočet hustoty

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (13)$$

Upravená hmotnostní bilance má pak tvar

$$0 = Q_0 + \frac{d[V \cdot \rho]}{dt} \quad (14)$$

Objem plynu v soustavě je dán konstrukcí soustavy. Popisuje jej rovnice

$$V = (H - h) \cdot S + V_0 \quad (15)$$

**kde:**

$V_0$  – doplňkový pneumatický objem

$h$  – aktuální výška hladiny kapaliny v nádrži

$S$  – průřez nádrže

$H$  – maximální výška hladiny v nádrži

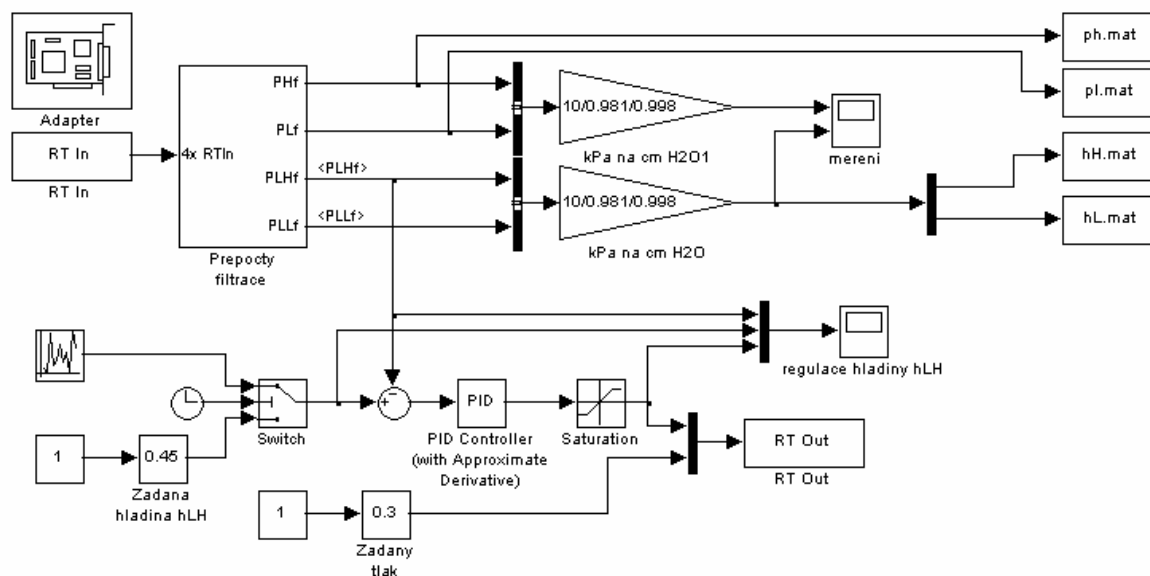
Nahrazením objemu v upravené hmotnostní bilanci plynu (14) pomocí právě odvozené rovnice popisující pneumatický objem soustavy (15), vyjádřením hustoty plynu ze stavové rovnice ideálního plynu (9) a následnou úpravou se získá potřebný vztah. Při odvozování je třeba brát v úvahu, že teplotu plynu uvnitř soustavy nelze měřit. Proto je zaveden předpoklad, že teplota uvnitř soustavy je konstantní, a že je rovna teplotě okolí. Výsledný vztah má tvar

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p \cdot S \cdot \frac{dh}{dt} - Q_0 \cdot R \cdot T_0}{S \cdot (h_{\max} - h) + V_0} \quad (16)$$

## 5 Měření tlaku a hladiny na zařízení

Aby bylo možno provést určení parametrů, je nutno u laboratorního modelu měřit výšku hladiny kapaliny v nádrži a příslušný tlak plynu. Pro experiment byly zvoleny levé nádrže. V průběhu experimentu je třeba vyřadit vliv druhých, tedy pravých výšek hladin. Laboratorní model umožňuje uzavřít pneumatické spojení mezi vzdušником a nádrží. Pro potřeby

experimentu se uzavře spojení mezi pravou nádrží a vzdušníkem, čímž dojde k eliminaci vlivu druhé výšky na průběh experimentu. Takto jsou pro experiment upraveny obě patra modelu, což umožňuje v průběhu jednoho experimentu získat data z obou pater. K získání dat se využívá počítače opatřeného akviziční kartou. Vzorkovací frekvence je 50 ms. Tato frekvence je zvolena proto, aby byli zachyceny změny tlaků plynu, které jsou velmi rychlé. Experiment je prováděn pomocí zapojení zachyceném na obrázku Obrázek 4. Zapojení je realizováno v programu SIMULINK.



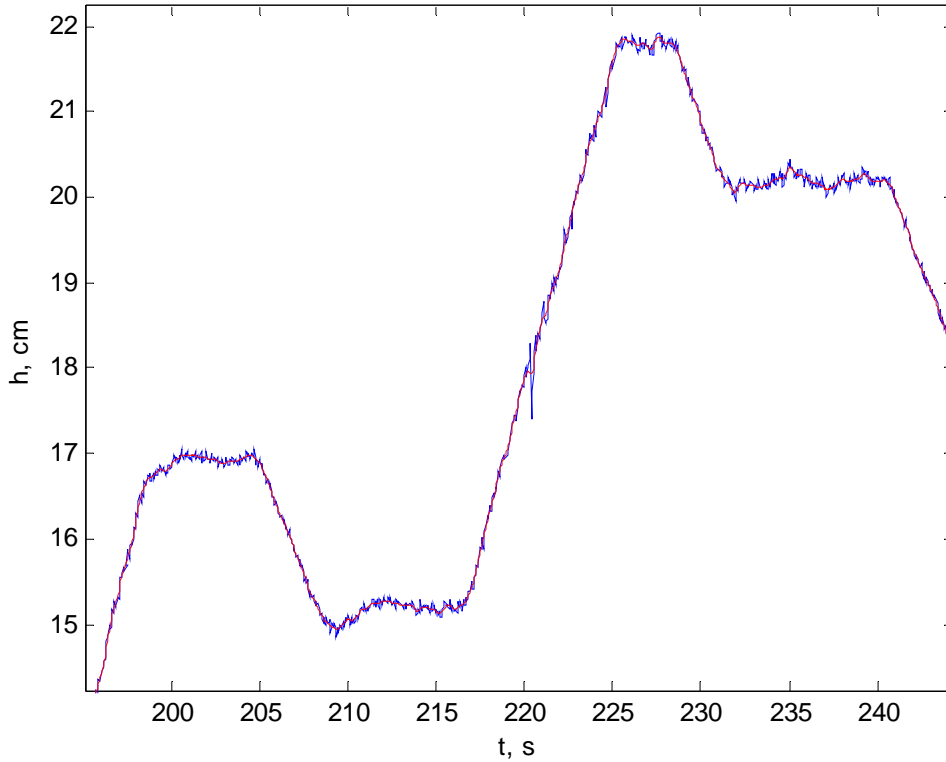
Obrázek 4: Zapojení pro měření výšek hladin a tlaků pomocí akviziční karty

## Popis schématu vytvořeném pro experiment

Z akviziční karty jsou načítána data v intervalu 50 ms. Ty jsou následně přepočítány do příslušných jednotek. Buzení soustavy je prováděno pomocí změny otevření ventilu. Otevření ventilu je nastavováno pomocí PID regulátoru, který má za úkol udržovat výšku v horní nádrži na žádané hodnotě. Žádaná hodnota výšky hladiny je v pravidelných intervalech měněna. Před započítím samotného experimentu, je nastavena žádaná hodnota výšky hladiny po dobu 90 sekund na konstantní hodnotu vyšší než nula, aby došlo k ustálení soustavy. Naměřená a přepočítaná data jsou ukládána do příslušných souborů ve formátu matice.

## 6 Vyhodnocení dat a dohledání parametrů

Data uložená v příslušných souborech jsou dosti zašuměná, což znemožňuje jejich přímé použití k výpočtu derivace výšky hladiny. Proto je třeba před jejich použitím šum odstranit. To bylo provedeno pomocí splinů. Bylo použito aproximační metody „Smoothing Spline“. Na obrázku Obrázek 5 je zachycen průběh naměřených dat a dat získaných filtrací pomocí splinu.



Obrázek 5: Průběh naměřeného a filtrovaného tlaku

Dále je třeba z uložených dat odříznout prvních 90 sekund, kdy probíhalo ustalování systému. Odvozenou rovnicí pro výpočet hmotnostního průtoku plynu zúženým místem (11) je potřeba pro optimalizaci upravit. Do vztahu zavedeme novou proměnnou  $\beta$ . Jedná se o váhový koeficient, který je dohledáván pomocí optimalizace, tak aby součin prvotně odhadnuté velikosti odvzdušňovacího otvoru  $s_0$  a koeficientem  $\beta$  odpovídal skutečné velikosti odvzdušňovacího otvoru. Upravená rovnice pro výtok plynu má tvar

$$Q_0 = \beta \cdot \frac{s_0}{R} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{m \cdot R}{m-1} \cdot \frac{1}{T_0} \cdot p \cdot p_0 \cdot \left[ \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{2}{m}-1} - \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{m}} \right]} \quad (17)$$

Pro přítok plynu do systému platí obdobný vztah

$$Q_0 = -\beta \cdot \frac{s_0}{R} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{m \cdot R}{m-1} \cdot \frac{1}{T_0} \cdot p \cdot p_0 \cdot \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{m}-1} - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{m}} \right]} \quad (18)$$

Vztah pro výpočet tlaku je také potřeba upravit pro potřeby optimalizace. Do vztahu se zavede váhový koeficient  $\gamma$ , který upravuje odhad volného objemu plynu  $V_0$ .

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p \cdot S \cdot \frac{dh}{dt} - Q_0 \cdot R \cdot T_0}{S \cdot (h_{\max} - h) + \gamma \cdot V_0} \quad (19)$$

V rovnici (19) se vyskytuje změna výšky hladiny  $dh(t)/dt$ . Její časový průběh ovšem není možné na laboratorním zařízení měřit. Změnu výšky hladiny je tedy nutno vypočítat z naměřených výšek hladin. Výpočet se provádí pomocí vztahu pro výpočet derivace:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{h(k) - h(k-1)}{\Delta t} \quad (20)$$

## Optimalizace

K optimalizaci se využívá funkce `fminsearch`, která je standardní součástí MATLABu. Účelová funkce má tvar

$$f(\beta, \gamma) = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n (psim_i - p_i)^2}{n}} \quad (21)$$

kde:

$f$  – účelová funkce

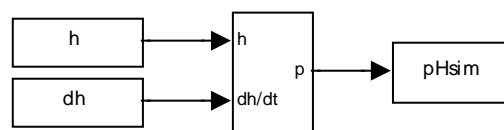
$p$  – tlak naměřený na laboratorním modelu

$\beta, \gamma$  – hledané parametry

$n$  – počet naměřených dat

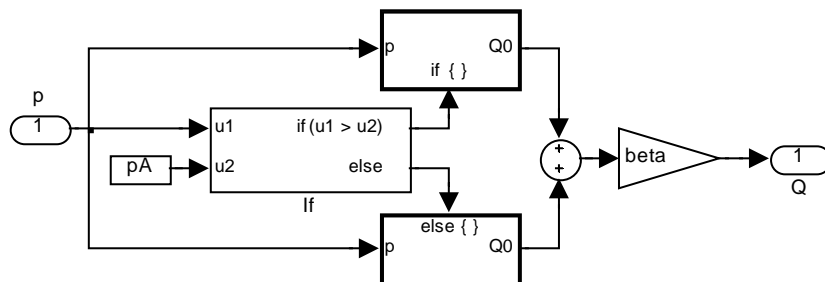
$psim$  – časový průběh tlaku získaný na základě simulace

Vektor proměnné  $psim$  je získáván ze simulací v programu SIMULINK. Pro tyto účely bylo na základě rovnic (15), (17), (18) a (19) vytvořeno zapojení zachycené na obrázku Obrázek 6.

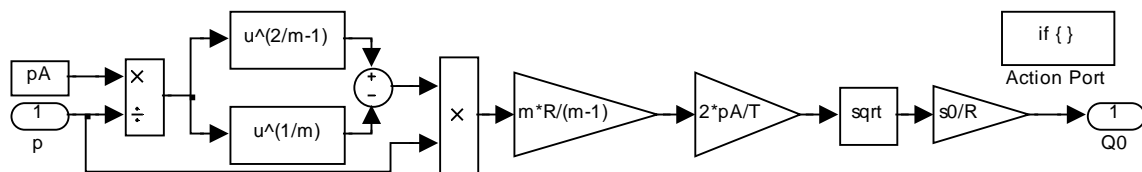


Obrázek 6: Základní zapojení modelu

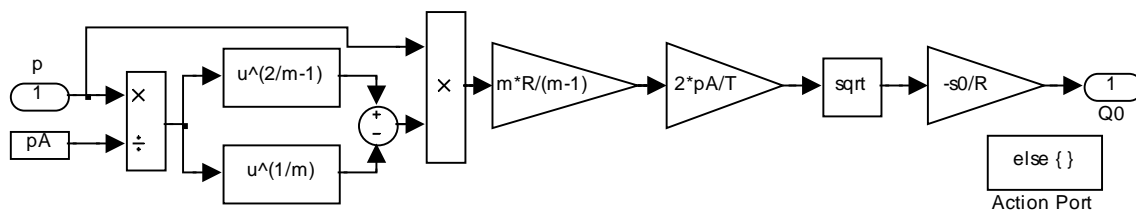
Na obrázku Obrázek 7 až Obrázek 9 je zachycen způsob realizace zapojení bloku pro výpočet hmotnostního průtoku plynu zúženým místem.



Obrázek 7: Rozhodování o směru proudění plynu



Obrázek 8: Výtok plynu z nádrže



Obrázek 9: Přítok plynu do nádrže

Vstupy pro výpočet tlaku jsou matice naměřených časových průběhů výšky hladiny  $h$  a matice vypočteného časového průběhu derivace výšky hladiny  $dh/dt$ . Tyto matice jsou načítány z „Workspace Matlabu“. Tlak vypočítaný na základě vstupů je ukládán po 50 ms do matice  $pHsim$ , která je po ukončení simulace uložena do souboru. Počáteční hodnota tlaku v integrátoru je rovna tlaku atmosférickému.

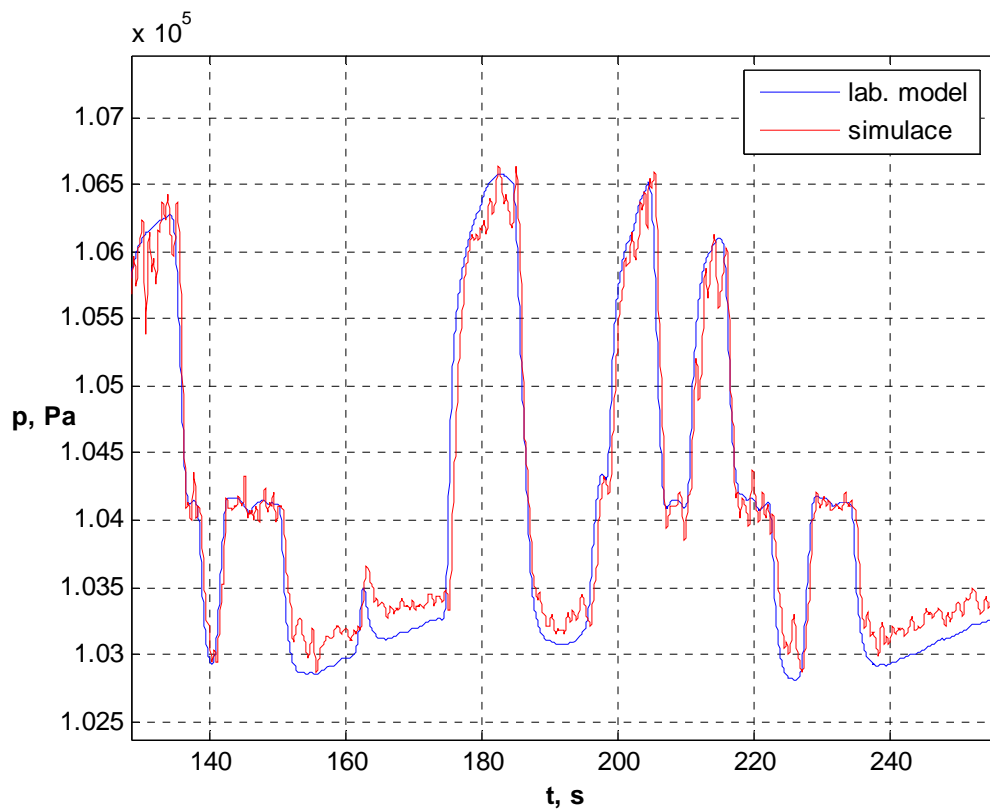
Tlak uložený v matici  $pHsim$  se používá pro výpočet optimalizačního kritéria (21). Optimalizací se nedohledávají přímo parametry soustavy, ale váhové koeficienty  $\beta$  a  $\gamma$ . Počáteční hodnoty váhových koeficientů jsou jedna. Parametry soustavy jsou uvedeny v tabulce Tabulka 1.

Tabulka 1: Parametry soustavy

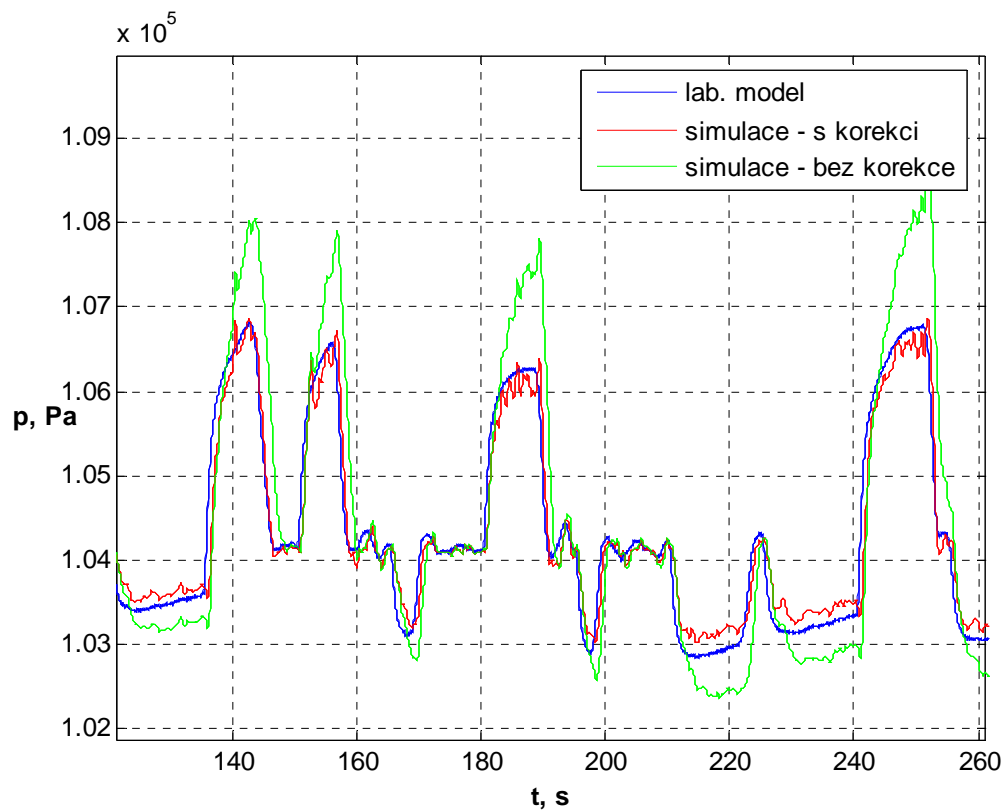
parametr	hodnota	jednotky
$R$	287	$J.K^{-1}.kg^{-1}$
$S$	$0,1987.10^{-2}$	$m^2$
$T$	294,15	K
$V_0$	$0,241.10^{-3}$	$m^3$
$g$	9,8066	$m.s^{-2}$
$h_{max}$	0,3	m
$m$	1,35	
$p_A$	$104,1.10^{-3}$	Pa
$\rho$	1000	$kg.m^{-3}$
$s$	$0,6605.10^{-5}$	$m^2$
$s_0$	$0,1964.10^{-6}$	$m^2$

Pro potřeby optimalizace byly provedeny dvě měření. Jedno při periodě změn žádané hodnoty výšky hladiny 12 sekund a jedno při periodě 15 sekund. Pomocí dat naměřených při periodě změn 12 sekund byly optimalizací dohledány váhové koeficienty  $\beta$  a  $\gamma$ . Časové průběhy dat naměřených a dat získaných na základě simulace s identifikovanými parametry  $\beta$  a  $\gamma$  jsou zachyceny na obrázku Obrázek 10. Správnost nalezených váhových koeficientů byla ověřena na datech naměřených s periodou změn 15 sekund. Na obrázku Obrázek 11 je vidět, že naměřený a vypočítaný průběh tlaku se poměrně dobře shodují i s daty naměřenými při periodě změn 15 sekund. Ve stejném obrázku je též graficky znázorněn průběh tlaku získaného z matematického modelu, který nemá zaveden váhové koeficienty  $\beta$  a  $\gamma$ .





Obrázek 10: Shoda naměřených dat při periodě 12 sekund a dat získaných ze simulace



Obrázek 11: Shoda naměřených dat při periodě 15 sekund a dat získaných ze simulací

## 7 Závěr

Použití matematických modelů vycházejících z matematicko fyzikální analýzy a zahrnující konkrétní geometrické uspořádání má velkou výhodu v tom, že dovoluje aspoň zhruba odhadnout reálné průběhy sledovaných veličin. Tato výhoda se zejména projevuje při silně nelineárním chování. V našem případě lze tuto skutečnost dokumentovat obrázkem Obrázek 11. Zelená křivka představuje vypočtený tlak vzduchu v zařízení pro změřený průběh výšky hladiny a hodnoty parametrů odpovídající geometrickým rozměrům zařízení a fyzikálním konstantám. Modrá křivka představuje naměřený průběh tlaku a červená křivka vypočtený průběh s korekcí plochy clony  $s_0$  a konstantní části pneumatického objemu  $V_0$ . Křivky na obrázku zachycují jiný průběh změn tlaků, než pro který byly korekce určovány.

Závěrem lze shrnout, že rovnice (11) vycházející z Saint Venantovy – Wantzelovy rovnice je v našem případě přímo použitelná. Korekcemi některých parametrů lze dosáhnout určitého zlepšení.

## Literatura

OWER, E.; PANKHURST, R. C. 1966: The Measurement of Air Flow 4th Edition. Pergamon Press, Oxford 1966. 367 pp.

ČERMÁK, J.; PETERKA, V.; ZÁVORKA, J. 1968: Dynamika regulovaných soustav v tepelné energetice a chemii. ACADEMIA, Praha 1968

NOŽIČKA, JIŘÍ 2001: Základy termomechaniky. [skript] ČVUT Praha, 2001, 187 s., ISBN 80-01-02409-1

MACHÁČEK, J.; DUŠEK, F.; HONC, D. 2004: Laboratory multivariable hydraulic-pneumatic process. In.: International Carpathian Control Conference, 25.-28.5.2004, Zakopane 25-27, May 2004, Poland, Vol.I., p.133-138, ISBN 83-89772-00-0

---

Ing. Pavel Škrabánek  
Katedra řízení procesů a výpočetní techniky  
Univerzita Pardubice

e-mail: [pavel.skrabanek@upce.cz](mailto:pavel.skrabanek@upce.cz)  
tel.: 466 037 124

doc. Ing. František Dušek, CSc.  
Katedra řízení procesů a výpočetní techniky  
Univerzita Pardubice

e-mail: [frantisek.dusek@upce.cz](mailto:frantisek.dusek@upce.cz)  
tel.: 466 037 125