

# VYUŽITÍ PROGRAMŮ MATLAB A COMSOL MULTIPHYSICS VE VÝUCE VÝPOČETNÍHO ELEKTROMAGNETISMU

Z. Raida

Vysoké učení technické v Brně, Ústav radioelektroniky

## Abstrakt

Příspěvek se zabývá výukou výpočetního elektromagnetismu (*computational electromagnetics*) na Fakultě elektrotechniky a komunikačních technologií VUT v Brně. Diskutována je struktura předmětu „CAD ve vysokofrekvenční a mikrovlnné technice“, který se danou problematikou zabývá. Popisován je výběr software pro zajištění výuky. Na ilustračním příkladu je demonstrováno využití programů MATLAB a COMSOL Multiphysics v daném předmětu.

## 1 Úvod

S postupným přesouváním komunikačních služeb do stále vyšších kmitočtových pásem nabývá na důležitosti vzdělávání studentů v oblasti numerického modelování elektromagnetických struktur (antény, mikrovlnné obvody, přenosová vedení). Na vyšších kmitočtech je totiž délka vlny srovnatelná s rozměry komponentů elektronických zařízení. K popisu systému tudíž nelze použít soustředěné parametry, ale je nutno pracovat s parametry rozprostřenými. Na popis struktury je třeba aplikovat Maxwellovy rovnice a vhodnou numerickou metodou je řešit [1].

K numerickému řešení elektromagnetických struktur lze využít řadu komerčně dostupných programů. Tyto programy bývají založeny na různých numerických metodách (nejčastěji metody konečných diferencí [2] a konečných prvků [3] pro diferenciální formulaci problému, a metody momentové [4] pro formulaci integrální). Proto pro různé třídy úloh vykazují komerční programy rozdílnou efektivnost řešení a přesnost výsledku. Každý uživatel komerčních programů z oblasti výpočetního elektromagnetismu (*computational electromagnetics*) by tedy měl relativně dobře znát numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic a rovnic integrálních, aby byl schopen pro řešení úlohu zvolit optimální program.

Výuce numerických metod řešení elektromagnetických polí se řadu let věnujeme na VUT v Brně v rámci magisterského předmětu CAD ve vysokofrekvenční a mikrovlnné technice.

## 2 Koncepce výuky

Koncepci výuky numerických metod můžeme vyjádřit dvojrozměrným schématem:

- **Horizontální, věcná rovina.** Při výuce postupujeme od řešení nejjednodušších problémů (analýza jednorozměrných elektrostatických struktur metodou konečných diferencí) po problémy komplikované (analýza dvojrozměrných dynamických neharmonických struktur momentovou metodou).
- **Vertikální, metodická rovina.** Výuku zahajujeme úpravou Maxwellových rovnic pro konkrétní analyzovaný problém. Na výslednou diferenciální nebo integrální rovnici aplikujeme vhodnou numerickou metodu (konečné diference, konečné prvky, momentová metoda). Metodu implementujeme formou vlastního programu. V poslední fázi jsou výsledky výpočtů ověřovány vhodným komerčním programem.

Při výběru programovacího nástroje pro vytváření vlastních zdrojových kódů studenty jsme zvolili program MATLAB, a to z následujících důvodů:

- Numerické metody transformují parciální diferenciální rovnice nebo rovnice integrální na maticové rovnice. MATLAB podporuje práci s řídkými maticemi a obsahuje řadu efektivních *solverů* pro řešení i velmi rozlehlých maticových problémů.

- Syntaxe MATLABu je velmi podobná jazykům C a Pascal, takže jej studenti relativně rychle a snadno zvládnou používat. Díky maticové povaze programu lze metodu implementovat relativně jednoduchým zdrojovým kódem, jehož vykonávání vykazuje vysokou výpočetní efektivitu.
- MATLAB obsahuje propracované nástroje pro vizualizaci výsledků. Studenti se tedy mohou soustředit na vývoj samotného jádra programu a o *post-processing* se postará MATLAB.
- K MATLABu lze zakoupit *Optimization Toolbox*. Optimalizační skripty mohou být propojovány s numerickými modely elektromagnetických struktur. Studenti si tak mohou vytvářet jednoduché nástroje pro počítačem podporovaný návrh jednoduchých mikrovlnných prvků.

Výběr programů pro ověření výsledků vlastních výpočtů je dominantně ovlivněn licenčními pravidly a finančními podmínkami jejich výrobců. Pro výuku v rámci předmětu CAD ve vysokofrekvenční a mikrovlnné technice se podařilo vyjednat přijatelné podmínky u tří nástrojů:

- **COMSOL Multiphysics** je založen na metodě konečných prvků. Pro oblast výpočetního elektromagnetismu nabízí řešení jedno- až třírozměrných úloh od elektrostatických problémů po výpočet dynamických harmonických polí.
- **CST Microwave Studio** je založeno na metodě konečných diferencí. Program je specializován na řešení problémů z oblasti mikrovlnné techniky a antén. Umožňuje výpočet jak v kmitočtové oblasti (harmonická analýza) tak v oblasti časové.
- **ANSOFT Designer** je komplexním nástrojem pro analýzu a návrh mikrovlnných komunikačních systémů. Designer má modulární strukturu, přičemž jedním z modulů je program pro analýzu planárních obvodů a antén momentovou metodou v kmitočtové oblasti.

Výše uvedené tři nástroje pokrývají všechny typy úloh, jimiž se v rámci předmětu zabýváme, vyjma problémů řešených momentovou metodou v časové oblasti [5]. Je to dáno tím, že v současné době neexistuje komerční program, v němž by byla tato metoda implementována. Momentová metoda v časové oblasti (TDIE, *Time Domain Integral Equation*) je totiž metodou relativně nezralou, takže její komerční implementace by byla velmi riskantní.

Uvedené postupy jsou v následující kapitole ilustrovány příkladem výuky metody konečných prvků, která je aplikována na modální analýzu podélně homogenních vlnovodů. Výsledky analýzy jsou ověřeny v programu COMSOL Multiphysics.

### 3 Výuka metody konečných prvků

Uvažujme podélně homogenní vlnovod, jehož plášť je vytvořen z dokonalého elektrického vodiče. Uvnitř vlnovodu uvažujeme vakuum. Aplikujeme-li na popis elektromagnetického pole uvnitř vlnovodu Maxwellovy rovnice, dospějeme po úpravách ke dvěma skalárním vlnovým rovnicím [1]. První vlnová rovnice je pro podélnou složku intenzity elektrického pole a slouží k výpočtu příčné magnetických vidů, druhá vlnová rovnice je pro podélnou složku intenzity magnetického pole a slouží k výpočtu vidů příčné elektrických.

Na řešení vlnových rovnic aplikujeme metodu konečných prvků [3]:

- Příčný průřez vlnovodu pokryjeme sítí trojúhelníkových prvků.
- Každý trojúhelníkový prvek popíšeme dvojicí matic koeficientů  $\mathbf{S}^{(e)}$  a  $\mathbf{T}^{(e)}$ , kde  $e$  je číslo konečného prvku. Matice  $\mathbf{S}^{(e)}$  a  $\mathbf{T}^{(e)}$  závisejí na tvaru a na rozměrech trojúhelníkového prvku.
- Matice  $\mathbf{S}^{(e)}$  a  $\mathbf{T}^{(e)}$  umístíme do diagonály matic  $\mathbf{S}_i$  a  $\mathbf{T}_i$ . Tyto matice odpovídají situaci, kdy je příčný profil vlnovodu rozřezán na *vzájemně izolované* trojúhelníky, které je zapotřebí v dalším kroku vzájemně propojit.
- Sestavíme vazební matici  $\mathbf{C}$ . Ta má tolik řádků, kolik je vrcholů *vzájemně izolovaných* trojúhelníků rozřezaného profilu, a tolik sloupců, kolik je uzlů ve složeném profilu. Termínem uzel přitom označujeme bod, v němž leží jeden nebo více vrcholů trojúhelníkových prvků *složené* struktury. Pokud vrchol trojúhelníka přináleží k  $n$ -tému uzlu, bude v  $n$ -tém sloupci matice  $\mathbf{C}$  na řádku, který odpovídá danému vrcholu trojúhelníka, jednička. Na všech ostatních pozicích jsou nuly.

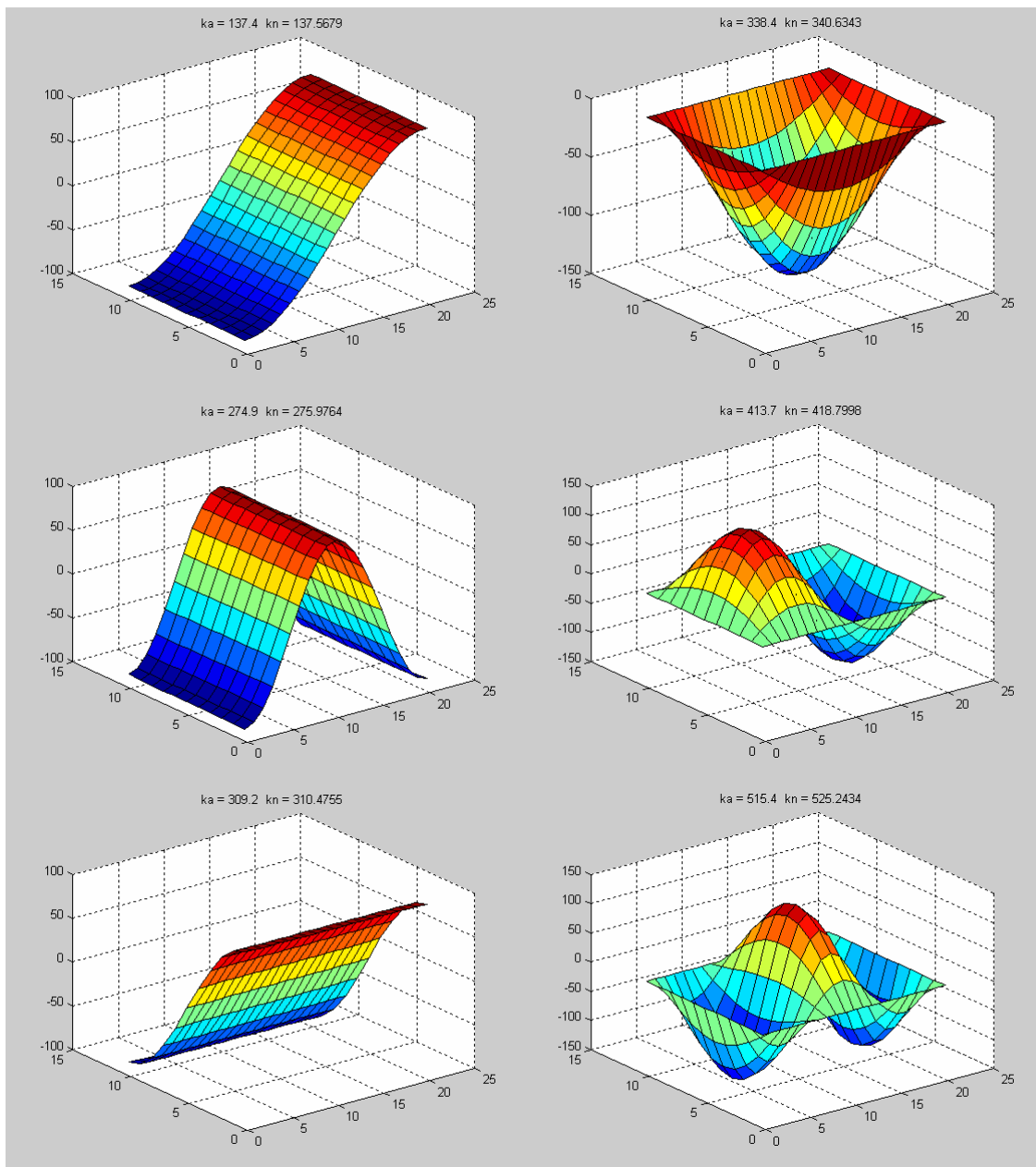
- Složení *vzájemně izolovaných* trojúhelníkových prvků do celistvé struktury je dosaženo maticovými součiny  $\mathbf{S} = \mathbf{C}^T \mathbf{S}_i \mathbf{C}$  a  $\mathbf{T} = \mathbf{C}^T \mathbf{T}_i \mathbf{C}$ .
- Vlnové rovnice přecházejí na zobecněný problém vlastních čísel  $\mathbf{S} \mathbf{H} + k^2 \mathbf{T} \mathbf{H} = \mathbf{0}$ . Zde  $\mathbf{H}$  značí sloupcový vektor uzlových hodnot podélné složky intenzity magnetického pole určitého příčně elektrického vidu a  $k$  je kritické vlnové číslo tohoto vidu. Situace pro vid příčně magnetický se odlišuje pouze v okrajových podmínkách na plášti vlnovodu.
- Zobecněný problém vlastních čísel řešíme v MATLABu voláním funkce `eig`. Získáme tak vlastní vektory uzlových hodnot intenzity pole a vlastní kritická vlnová čísla.

Popsaný algoritmus lze v MATLABu pro vlnovod obdélníkového průřezu snadno implementovat. Implementaci si navíc usnadníme vhodnou volbou sítě konečných prvků – obdélníkový průřez rozdělíme na obdélníkové prvky, z nichž každý považujeme za dvojici pravouhlých trojúhelníků se společnou přeponou (diagonála obdélníka). Popsané situaci odpovídá následující zdrojový kód:

```
function kn = linearTE( Nx, Ny)
% Nx = počet konečných prvků ve vodorovném směru
% Ny = počet konečných prvků ve svislém směru
a = 22.86e-3; % šířka vlnovodu
b = 10.16e-3; % výška vlnovodu
dx = ones(1,Nx) * (a/Nx); % vektor vodorovných rozměrů koneč. prvků
dy = ones(1,Ny) * (b/Ny); % vektor svislých rozměrů koneč. prvků
Q1 = [ 0 0 0; 0 1 -1; 0 -1 1] / 2; % tabulované matice
Q3 = [ 1 -1 0; -1 1 0; 0 0 0] / 2; % konenčných prvků
Te = [ 2 1 1; 1 2 1; 1 1 2] /12; % viz [3]
N = 2 * Nx * Ny; % celkový počet k.p.
St = sparse( 3*N, 3*N);
Tt = sparse( 3*N, 3*N);
n = 0; % matice pro izolované k.p.
for ny=1:Ny
for nx=1:Nx
n = n + 1;
lw = 3*n-2;
hg = 3*n; % ↓ matice pro dolní k.p.
St(lw:hg,lw:hg) = Q1 * dx(nx)/dy(ny) + Q3 * dy(ny)/dx(nx);
Tt(lw:hg,lw:hg) = Te * dx(nx)*dy(ny)/2;
St(lw+3*Nx:hg+3*Nx,lw+3*Nx:hg+3*Nx) = St(lw:hg,lw:hg);
Tt(lw+3*Nx:hg+3*Nx,lw+3*Nx:hg+3*Nx) = Tt(lw:hg,lw:hg);
end % ↑ matice pro horní k.p.
n = n + Nx;
end
C = get_cl( Nx, Ny, N) % vazební matici sestavujeme mimo
S = C'*St*C; % sdružení matic
T = C'*Tt*C;
[H,K] = eig( S, T); % řešení problému vlastních čísel
```

Vizualizace vypočtených rozložení podélné složky pole a porovnání numericky vypočtených kritických vlnových čísel  $k_n$  s čísly určenými analyticky  $k_a$  je uvedena v obr. 1. Z obrázků je zřejmá funkčnost metody a dobrá shoda s analytickými výsledky.

V následném kroku je celá analýza zopakována v programu COMSOL Multiphysics 3.3. Výsledky výpočtů jsou uvedeny v obr. 2. Porovnáním rozložení podélných složek pole jednotlivých vidů nalzáme shodu mezi oběma programy.



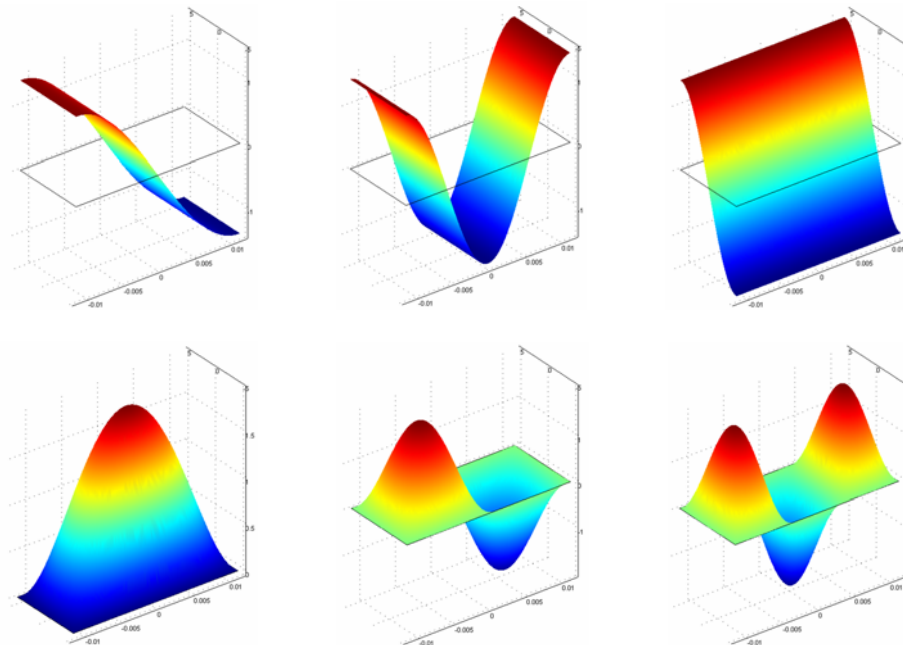
**Obr. 1** *Tři nejnižší vidy příčně elektrické  $TE_{10}$ ,  $TE_{20}$ ,  $TE_{01}$  (vlevo, rozložení podélné složky intenzity magnetického pole  $H_z$ ) a tři nejnižší vidy příčně magnetické  $TM_{11}$ ,  $TM_{21}$ ,  $TM_{31}$  (vpravo, rozložení podélné složky intenzity elektrického pole  $E_z$ ).*

## 4 Závěr

Výuku výpočetního elektromagnetismu lze považovat za velmi náročnou:

- Studenti musejí dobře rozumět abstraktní teorii elektromagnetického pole a její aplikaci na řešení konkrétních mikrovlnných problémů.
- Od studentů jsou vyžadovány dobré matematické znalosti z oblasti integrálního a diferenciálního počtu, vektorové analýzy, variačních metod a maticového počtu.
- Studenti musejí umět rychle a efektivně programovat.

Z výše uvedených důvodů není o předmět CAD ve vysokofrekvenční a mikrovlnné technice velký zájem. Nicméně, každým rokem se najde skupina zhruba 30 studentů, kteří si předmět zapíší.



**Obr. 2** Tři nejnižší vidy příčně elektrické  $TE_{10}$ ,  $TE_{20}$ ,  $TE_{01}$  (nahore, rozložení podélné složky intenzity magnetického pole  $H_z$ ) a tři nejnižší vidy příčně magnetické  $TM_{11}$ ,  $TM_{21}$ ,  $TM_{31}$  (dole, rozložení podélné složky intenzity elektrického pole  $E_z$ ).

Aby studium dané problematiky bylo pro studenty zvládnutelné, snažíme se rozvíjet různé typy podpory samostatné práce studentů:

- Společně s kolegy z FEL ČVUT v Praze byly napsány dvě monografie zabývající se problematikou výpočetního elektromagnetismu [7], [8]. Tyto monografie tvoří základní studijní literaturu předmětu.
- Vytvořili jsme internetovou učebnici elektromagnetických vln [http://www.feec.vutbr.cz/~raida/multimedia\\_en](http://www.feec.vutbr.cz/~raida/multimedia_en), která teoretické popisy doprovází ilustračními výpočty, jež jsou realizovány jednak formou javovských appletů a jednak formou odpovídajících m-souborů MATLABu. M-soubory si studenti mohou z webových stránek učebnice stáhnout.
- Studentům je umožněn neomezený přístup do počítačových učeben, v nichž je instalován veškerý software využívaný ve výuce. Studenti tak mohou individuálně pracovat na projektech, za jejichž vypracování a obhájení je jim udělen klasifikovaný zápočet.
- Veškeré informace týkající se předmětu jsou zveřejňovány na jeho webových stránkách: <http://www.feec.vutbr.cz/~raida/mcvt>

Přes veškerou snahu nejsou výsledky ve výuce výpočetního elektromagnetismu nijak oslnivé. Nicméně, vždy se najde několik málo studentů, které tato problematika osloví a věnují se jí dále v rámci svých diplomových prací a případně i disertací.

## Poděkování

Stávající forma předmětu CAD ve vysokofrekvenční a mikrovlnné technice, jak je popsána v tomto příspěvku, byla vybudována díky finanční podpoře grantu Fondu rozvoje vysokých škol č. 483/2007 *Inovace magisterského předmětu „CAD ve vf. a mikrovlnné technice“*.

## Literatura

- [1] TYSL, V., RŮŽIČKA, V. *Teoretické základy mikrovlnné techniky*. Praha: SNTL, 1989.
- [2] TAFLOVE, A. *Computational electrodynamics: The finite-difference time-domain method*. Boston: Artech House, 1995.
- [3] SILVESTER, P. P., FERRARI, R. L. *Finite elements for electrical engineers*, 3rd edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [4] HARRINGTON, R. F. *Field computation by moment methods*, 2nd edition. Piscataway: IEEE Press, 1993.
- [5] RAO, S. M. *Time Domain Electromagnetics*. San Diego: Academic Press, 1999.
- [6] GILL, P.E., MURRAY, W., WRIGHT, M.H. *Practical Optimization*. San Diego: Academic Press, 1981.
- [7] ČERNOHORSKÝ, D., RAIDA, Z., ŠKVOR, Z., NOVÁČEK, Z. *Analýza a optimalizace mikrovlnných struktur*. Brno: Nakladatelství VUTIUM, 1999.
- [8] RAIDA, Z. a kol. *Analýza mikrovlnných struktur v časové oblasti*. Brno: Nakladatelství VUTIUM, 2004.