

# Návrh explicitního prediktivního regulátoru s využitím Multi-Parametric Toolboxu pro Matlab

J. Řehoř

Fakulta elektrotechnická, ČVUT v Praze

## Abstrakt

Explicitní řešení úlohy prediktivní regulace přináší výhody optimálního řízení i pro relativně rychlé systémy, kde by výpočetní náročnost on-line optimalizace klasického prediktivního regulátoru byla limitující. V tomto článku nejprve formulujeme takový kvadraticky optimální regulátor s pomocí multiparametrického programování a ukážeme, jak lze pro návrh využít Multi-Parametric Toolboxu. Na závěr vše demonstrovujeme na návrhu řízení pro laboratorní model *CE106* „kulička na tyči.“

## 1 Prediktivní řízení

*Model Predictive Control*, nebo-li MPC, je oblíbená metoda řízení procesů v dnešní průmyslové praxi. Mezi její hlavní přednosti patří především schopnost respektovat zadaná omezení a řízení podle zadaného kritéria optimality.

Uvažujme následující diskretní dynamický systém

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2)$$

a formulujme kvadratické kritérium optimality na konečném horizontu délky  $N$

$$J(x(t), u(t) \dots u(N-1)) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k] + \frac{1}{2} x_N^T Q_N x_N \quad (3)$$

s omezením

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \\ x_0 &= x(t), \\ X_{min} &\leq x_k \leq X_{max} \text{ pro } k = 0, \dots, N, \\ U_{min} &\leq u_k \leq U_{max} \text{ pro } k = 0, \dots, N-1, \\ Q &= Q^T \succeq 0, Q_N = Q_N^T \succeq 0, R = R^T \succ 0, \end{aligned} \quad (4)$$

kde  $Q, Q_N \in \mathcal{R}^{n \times n}$  a  $R \in \mathcal{R}^{m \times m}$  jsou váhové matice. Pomocí substituce

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^i B u_{k-1-i} \quad (5)$$

a několika algebraických úprav přepíšeme výše zmíněné vztahy do maticového tvaru

$$\begin{aligned} J(x(t), U_t) &= \frac{1}{2} U_t^T H U_t + x^T(t) F U_t + \frac{1}{2} x^T(t) Y x(t), \\ G U_t &\leq W + E x(t), \end{aligned} \quad (6)$$

kde  $U_t = [u^T(t), \dots, u^T(N-1)]^T$ ,  $H \in \mathcal{R}^{m \times m}$ ,  $F \in \mathcal{R}^{n \times m}$ ,  $Y \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $G \in \mathcal{R}^{q \times m}$ ,  $W \in \mathcal{R}^q$ ,  $E \in \mathcal{R}^{q \times n}$ .

Označme  $J^*(x(t))$  optimální hodnotu ztrátové funkce a  $U^*(x(t))$  optimální řídicí sekvenci

$$U_t^*(x(t)) = \arg \min_{U_t} \{J(x(t), U_t) \mid G U_t \leq W + E x(t)\} \quad (7)$$

$$J^*(x(t)) = \min_{U_t} \{J(x(t), U_t) \mid G U_t \leq W + E x(t)\}. \quad (8)$$

Řídící zásah (7) je vypočten minimalizací zvoleného kritéria na predikovaném vývoji dynamického systému při respektování zadaných omezení. Abychom zajistili zpětnou vazbu pro řízený systém, používáme metodu „klouzavého horizontu“ (RHC - *Receding Horizon Control*). Princip spočívá v iterativním řešení optimalizace (7), přičemž aplikujeme pouze první krok řízení, tj.  $u(t) = [I, 0, \dots, 0] U_t^*(x(t))$  a v čase  $t + 1$  vše opakujeme. Tento postup rozumíme pod zkratkou MPC. Jeho nevýhodou je numericky náročná optimalizace, kterou musíme řešit *on-line* (RHC).

## 1.1 Stabilita a řešitelnost MPC

Použití klouzavého horizontu ještě nezaručuje stabilitu soustavy. Pro některá  $x(t)$  ani nemusí existovat přípustné řešení problému (7). Oblast splnitelných počátečních podmínek  $\mathcal{X}_{feas}$  získáme snadno projekcí rozšířeného polytopu

$$\begin{bmatrix} -E & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ U_t \end{bmatrix} \leq W \quad (9)$$

do prostoru parametrů  $\mathcal{R}^n$ .

Stabilitu typicky zajišťujeme pomocí dodatečných podmínek na koncový stav  $x_N$  a na váhu koncového stavu  $Q_N$ . Přehled možných přístupů ke stabilizaci RHC udává [10]. Zde se krátce zmíníme o metodě známe jako „*dual-mode MPC*.” Předpokládejme, že platí:

1. pro  $k = 0, \dots, N - 1$  je systém řízen optimálně podle (7) tj.  $u_k = U_{k|t}^*(x(t))$ ,
2. pro  $k \geq N$  je systém řízen pomocí stabilizující zpětné vazby  $u_k = -Kx_{k|t}$ .

Toho lze dosáhnout vhodně zvolenou koncovou váhou  $Q_N = P$ , kde  $P$  je řešení algebraické Riccatiho rovnice (ARE) a  $K$  bude příslušné ustálené zesílení z ARE (viz. [5]). Dále nechť množina definovaná podle (9) obsahuje počátek jako svůj vnitřní bod. Potom lze předpokládat, že pro dostatečně dlouhý horizont predikce  $N$  budou ukládaná omezení na  $x(k)$  a  $u(k)$  splněna pro všechna  $k \geq N$ . Jelikož délka tohoto horizontu je závislá na počátečním stavu, bude obtížné ji stanovit *a priori*. Snadnější způsob spočívá v dodatečné podmínce na koncový stav  $x_N \in \mathcal{X}_{LQR}$ , kde  $\mathcal{X}_{LQR}$  je maximální pozitivně invariantní množina podle [6], pro kterou platí

- $x_k \in \mathcal{X}_{LQR} \Rightarrow x_{k+i} \in \mathcal{X}_{LQR}$ , pro  $i > 0$ ,
- $x_k \in \mathcal{X}_{LQR} \Rightarrow -(GK + S)x_{k+i} \leq W$ , pro  $i \geq 0$ ,
- množina  $\mathcal{X}_{LQR}$  je polytopická a lze ji doplnit do omezení (6).

Zatímco v prvním módu optimální řízení podle (7) zaručuje splnění zadaných podmínek a zavedení stavu do  $\mathcal{X}_{LQR}$ , druhý mód zajišťuje stabilitu a díky  $x_N \in \mathcal{X}_{LQR}$  též splnění podmínek.

## 2 Explicitní MPC

Je zřejmé, že optimální hodnota kritéria (8) i optimální řídicí sekvence (7) jsou funkcí stavu  $x(t)$ . Tuto úlohu lze také formulovat pomocí multiparametrického kvadratického programování (mp-QP), kdy se snažíme nalézt optimální řešení pro všechny možné hodnoty parametru  $x(t)$  předem. V dalším stručně shrneme výsledky z [2].

Substitucí  $U_t = \tilde{U}_t - H^{-1}F^T x(t)$  převedeme kritérium (8) do vhodnějšího tvaru

$$J^*(x(t)) = \min_{\tilde{U}_t} \left\{ J(\tilde{U}_t, x(t)) = \frac{1}{2} \tilde{U}_t^T H \tilde{U}_t + \beta \mid G \tilde{U}_t \leq W + Sx(t) \right\}, \quad (10)$$

kde  $S = E + GH^{-1}F^T$  a  $\beta = \frac{1}{2}x^T(t)(FH^{-1}F^T + Y)x(t)$ . Dále označme  $\mathcal{I} = \{1, \dots, q\}$  množinu indexů, odpovídající řádkům matic  $G$ ,  $W$  a  $S$ .

**Definice 1:** Kritický region  $CR$  je taková polytopická oblast v prostoru parametrů  $x(t)$ , která má v optimu ( $J^*(x(t))$ ,  $U^*(x(t))$ ) aktivní stejná omezení  $A(x(t)) \subset \mathcal{I}$ . Tj. platí

$$G_A \tilde{U}_t^*(x(t)) = W_A + S_A x(t) \text{ pro } x(t) \in CR. \quad (11)$$

**Tvrzení 1:** Nechť  $H \succ 0$  a nechť  $G_A$  má lineárně nezávislé řádky, potom optimální sekvence  $\tilde{U}_t^*(x(t))$  je jednoznačně definovaná afinní funkce stavu  $x(t)$  na daném kritickém regionu  $CR$

$$\tilde{U}_t^*(x(t)) = H^{-1}G_A^T(G_A H^{-1}G_A^T)(W_A + S_A x(t)). \quad (12)$$

**Tvrzení 2:** Uvažujme optimalizační problém (7) formulovaný jako mp-QP. Nechť  $H \succ 0$ , potom optimální řídicí sekvence  $U_t^*(x(t)) : \mathcal{X}_{feas} \rightarrow \mathcal{R}^m$  je spojitá, po částech afinní funkce na polyedru a optimální hodnota  $J^*(x(t))$  je spojitá, konvexní a po částech kvadratická funkce na polyedru.

Algoritmus mp-QP nejprve spočítá řešení (7) pro vhodně zvolenou počáteční podmínku ( $x_0 \in X_{feas}$ ) a sestrojí příslušný kritický region  $CR_0$ . Poté rekurzivně prohledává okolí a vytváří nové regiony. Výsledkem je rozdělení oblasti  $\mathcal{X}_{feas}$  do kritických regionů  $CR_i = \{x \mid P_i x \leq p_i\}$ , nad kterými je definovaná spojitá afinní funkce

$$U_t^*(x(t)) = \mathcal{F}_i x(t) + \mathcal{G}_i \quad (13)$$

a spojitá kvadratická funkce

$$J_t^*(x(t)) = x^T(t)\mathcal{A}_i x(t) + \mathcal{B}_i x(t) + \mathcal{C}_i. \quad (14)$$

Tímto jsme přesunuli výpočetně náročnou numerickou optimalizaci (7) k *off-line* výpočtům. V průběhu řízení stačí identifikovat region  $CR_i$ , obsahující aktuální stav  $x(t)$ , a aplikovat příslušný zákon řízení (13).

**Příklad 1:** Pro dvojitý integrátor

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1], D = 0. \quad (15)$$

s omezením  $-1 \leq u \leq 1$  a  $-7 \leq y \leq 7$  navrhne explicitní MPC podle (8) s parametry  $N = 7$ ,  $R = 1$ ,  $Q = 1 \cdot I$  a  $Q_N = P$ , kde  $P$  je řešení diskrétní Riccatiho rovnice. Navíc přidáme stabilizující podmínku  $x_N \in \mathcal{X}_{LQR}$ . Výsledek je dobře patrný z obrázku 1.

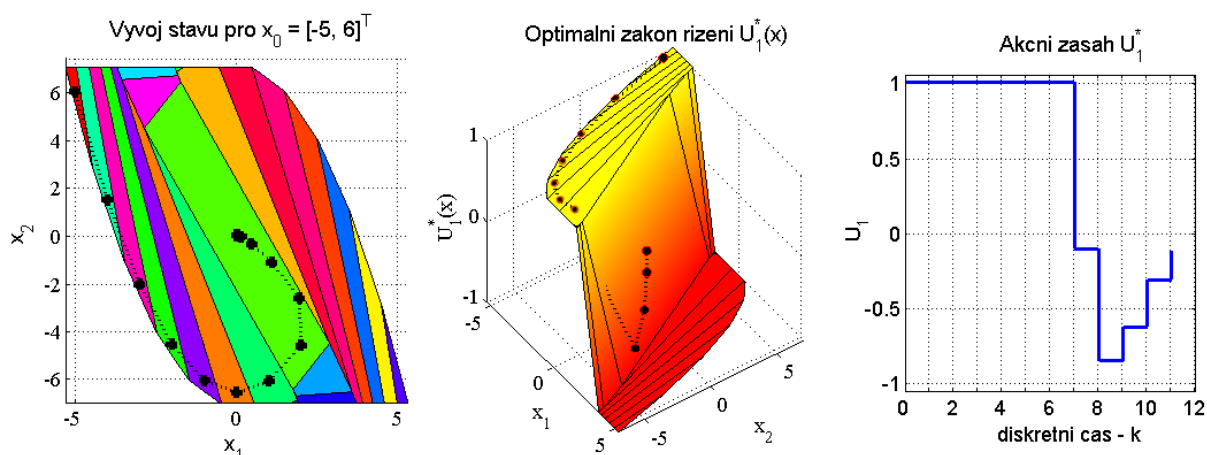
**Poznámka 1:** Předpokládejme, že množina (9) obsahuje počátek jako svůj vnitřní bod (všechny složky vektoru  $W > 0$ ) a zkonstruujeme příslušný region  $CR_0$ . Pro tento region platí, že všechna omezení jsou neaktivní a optimum leží ve vrcholu kvadratické funkce (3). Řízení podle (12) bude rovno  $\tilde{U}_t^*(x(t)) = 0 \rightarrow U_t^*(x(t)) = -H^{-1}F^T x(t)$ . Uvedený vztah představuje analytické řešení problému (3) bez omezení. Navíc se při použití *dual-mode* MPC bude řešení asymptoticky blížit k LQ řízení  $u(t) = -Kx(t)$ . Toho lze využít při konstrukci  $X_{LQR}$ . Oproti výpočetně složitějšímu algoritmu [6] jsme získali analytické řešení. Pro dostatečně dlouhý horizont platí

$$X_{LQR} = \{x \mid -Sx \leq W\}. \quad (16)$$

Důkaz vychází z Karush-Kuhn-Tuckerových podmínek optimality.

## 2.1 Redukce počtu regionů

Nepříjemnou vlastností explicitního řešení MPC je exponenciální závislost množství generovaných regionů na počtu omezení [7]. Vysoký počet regionů pak zatěžuje *on-line* výpočetní



Obrázek 1: Odezva uzavřené regulační smyčky na počáteční stav  $x_0 = [-5, 6]^T$ .

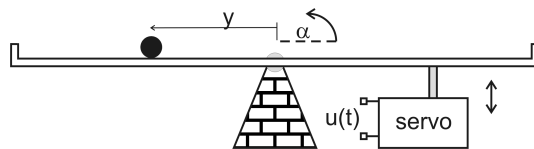
náročnost, kdy je třeba identifikovat region obsahující stav  $x(t)$  a tedy i optimální zákon řízení  $U^*(x(t))$ .

Nejjednodušší způsob vyhledání správného regionu postupně prochází seznamem polytopů a vyhodnocuje podmínku  $P_i x(t) \leq p_i$ . Sofistikovanější metoda [3] používá speciálně sestavený deskriptor, který otestuje příslušnost  $x(t)$  k regionu  $CR_i$  pouhým vyhodnocením afinní funkce. Zároveň se sníží nároky na paměť, jelikož nemusíme uchovávat data  $[P_i, p_i]$ . Efektivnější algoritmus [11] využívá binární vyhledávací strom (složitost logaritmičsky závislá na počtu vygenerovaných regionů).

Další možností je snížit počet regionů. Bez omezení optimality lze (díky RHC) sloučit dohromady ty regiony, které obsahují stejné řízení v prvním kroku a současně jejich sloučení vytváří polytop. Ostatní postupy redukce počtu polytopů vedou na „suboptimálním“ řešení např. zkrácením horizontu řízení [4], či jiné metody [1], [7].

### 3 Multi-Parametric Toolbox

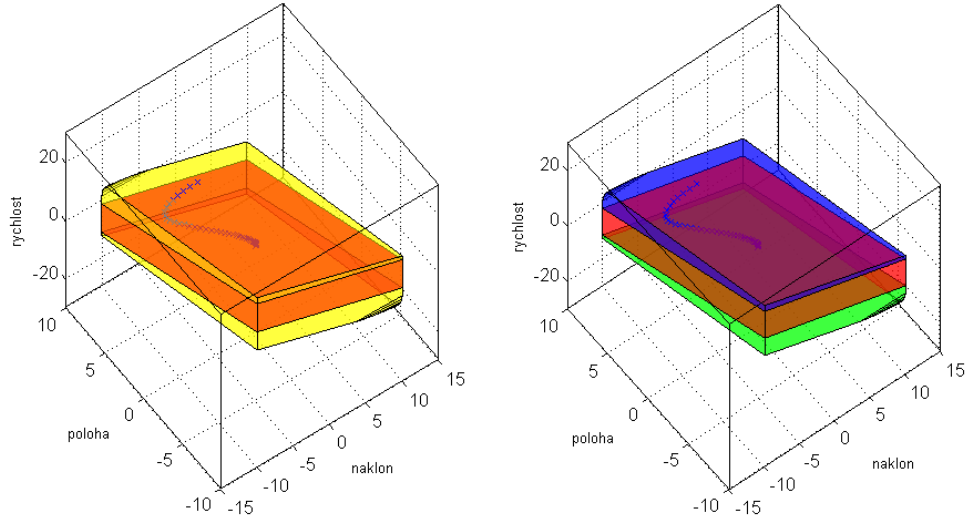
*Multi-Parametric Toolbox* [9, 8] (MPT) je volně stažitelný nástroj určený k návrhu a analýze optimálních regulátorů pro lineární, nelineární a hybridní systémy se zadaným omezením. K jeho hlavním přednostem patří schopnost generovat explicitní řešení prediktivního regulátoru pro kvadratické či lineární (1-norma,  $\infty$ -norma) kritérium pomocí úlohy multiparametrického programování. Obsahuje též řadu užitečných funkcí pro práci s polytopy.



Obrázek 2: Model CE106 - kulička na tyči

Základní funkce lze snadno využít pomocí grafického rozhraní (`mpt_studio`). Ukážeme si postup, jak pomocí MPT navrhnout regulátor pro model CE106 „kulička na tyči“ (obrázek 2). Nejprve musíme definovat dynamiku a omezení systému. Uvažujme diskrétní stavový popis modelu

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0.8465 & 0 & 0 \\ 0.0034 & 1.0000 & 0.0491 \\ 0.1368 & 0 & 0.9649 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 0.1075 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 C &= [0 \ 1 \ 0], & D &= 0,
 \end{aligned} \tag{17}$$



Obrázek 3: Rozdělení stavového prostoru. Vlevo: oblast dosažitelnosti (žlutě) a invariantní množina (červeně). Vpravo: explicitní řešení MPC.

se vzorkovací periodou  $T_s = 0,05s$ . Složky stavového vektoru  $x(t)$  odpovídají postupně náklonu tyče, poloze kuličky a rychlosti kuličky. K tomu odpovídající omezení

$$\begin{aligned} -10 &\leq u(t) \leq 10, \\ \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \\ -100 \end{bmatrix} &\leq x(t) \leq \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 100 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$

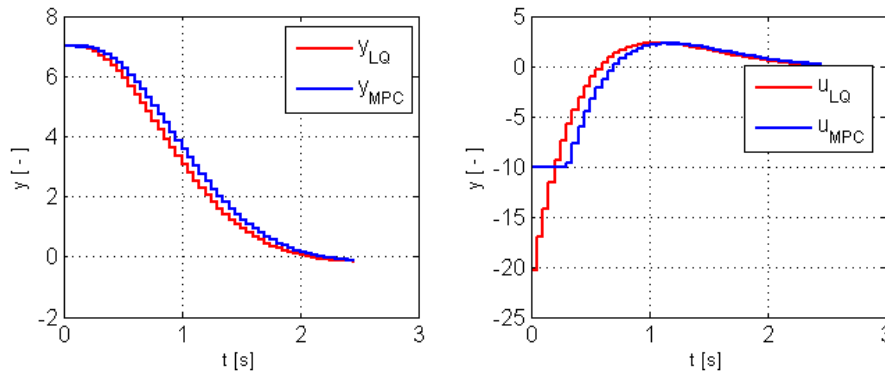
Dále musíme formulovat optimalizační problém. Pro kvadratické kritérium zvolíme horizont predikce  $N = 10$  a váhové matice  $Q = \text{diag}(1, 10, 1)$ ,  $R = 1$ . Omezení na koncový stav lze buď definovat vlastní množinou, nebo nechat MPT vypočítat množinu  $X_{LQR}$ . Zároveň můžeme zvolit nějaké suboptimální řešení (viz. odst. Redukce počtu regionů).

Typickým požadavkem při návrhu MPC je sledování zadané reference. Multi-Parametric Toolbox nabízí možnost sestavení regulátoru pro „po částech konstantní referenci“ (dojde k rozšíření stavového prostoru). My se pro jednoduchost přidržíme základního schématu regulace k počátku.

Po ukončení výpočtu mp-QP obdržíme rozdělení  $X_{feas}$  do 21 kritických regionů. Sloučíme-li regiony se shodným zákonem řízení pro první krok, dostaneme pouze tři polytopy - tři afinní zákony řízení. Na obrázku 3 vlevo vidíme vykreslenou oblast dosažitelnosti společně s množinou  $X_{LQR}$ . Vpravo rozdělení mp-QP po sloučení regionů. Za povšimnutí stojí region  $CR_0$ , který odpovídá množině  $X_{LQR}$  (viz poznámka 1). Simulace na obrázku 4 ukazuje vývoj vstupu a výstupu pro zvolenou počáteční podmínku  $x(0) = [0, 7, 0]^T$ . Pro porovnání jsme navrhli LQ regulátor s identickými váhovými maticemi. Na první pohled je patrné, jak vstup explicitního MPC sleduje zadaná omezení, zatímco obyčejný LQ regulátor vede vstup do saturace.

## 4 Závěr

V článku jsme stručně zavedli pojem explicitního prediktivního regulátoru, abychom jej dokázali navrhnout v prostředí Multi-Parametric Toolboxu. Základní návrh se v ničem neliší od klasické metody MPC, proto různá rozšíření (*range control*,  $\Delta u$  formulace) stačí sestavit obvyklým způsobem a potom jednoduše přeformulovat pro multiparametrické kvadratické či lineární programování.



Obrázek 4: Odezva vstupu a výstupu na počáteční podmínku  $x(0) = [0, 7, 0]^T$ .

Nutno ještě podotknout, že se nám obvykle nepodaří sestavit regulátor s tak nízkým počtem regionů. Pouhým rozšířením předchozího regulátoru o sledování po částech konstantní reference a omezení na  $\Delta u$  - tedy přidáním dvou dimenzí - získáme rozdělení do 4671 regionů. Proto se tato metoda nehodí pro složité systémy s velkým řádem. Na řadu pak přichází různé suboptimální metody. Zachována zůstane schopnost respektovat daná omezení.

Další, nediskutovaná, výhoda explicitního řešení spočívá v možnosti analyzovat chování navrženého regulátoru. Jelikož známe zákon řízení, můžeme se pokusit o sestavení Lyapunovy funkce. Tím bychom prokázali stabilitu navrženého explicitního, či ekvivalentního klasického regulátoru bez implicitní stability (například při snižování komplexity blokováním akčních zásahů).

## Reference

- [1] A. Bemporad and C. Filippi. Suboptimal Explicit Receding Horizon Control via Approximate Multiparametric Quadratic Programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 117(1):9–38, 2003.
- [2] A. Bemporad, M. Morari, V. Dua, and EN Pistikopoulos. The explicit solution of model predictive control via multiparametric quadratic programming. *American Control Conference, 2000. Proceedings of the 2000*, 2, 2000.
- [3] F. Borrelli, M. Baotic, A. Bemporad, and M. Morari. Efficient On-Line Computation of Explicit Model Predictive Control. Technical report, August 2001.
- [4] R. Cagienard, P. Grieder, E.C. Kerrigan, and M. Morari. Move Blocking Strategies in Receding Horizon Control. *Journal of Process Control*, 17(6):563–570, 2007.
- [5] G. De Nicolao and RR Bitmead. Fake Riccati equations for stable receding horizon control. *Proc. 4th Eur. Control Conf.*
- [6] E. Gilbert and K. Tan. Linear systems with state and control constraints: the theory and application of maximal output admissible sets. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 36(9):1008–1020, 1991.
- [7] P. Grieder and M. Morari. Complexity reduction of receding horizon control. *Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on*, 3, 2003.
- [8] M. Kvasnica, P. Grieder, and M. Baotić. Multi-Parametric Toolbox (MPT), 2004.
- [9] M. Kvasnica, P. Grieder, M. Baotic, and M. Morari. Multi-Parametric Toolbox (MPT). In *HSCC (Hybrid Systems: Computation and Control)*, pages 448–462, March 2004.

- [10] D.Q. Mayne, J.B. Rawlings, C.V. Rao, and P.O.M. Scokaert. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 36(6):789–814, 2000.
- [11] P. Tøndel, TA Johansen, and A. Bemporad. Evaluation of piecewise affine control via binary search tree. *Automatica*, 39(5):945–950, 2003.