

# NUMERICKÁ ANALÝZA ŠÍŘENÍ SVĚTELNÝCH PAPRSKŮ V IZOTROPNÍM OPTICKÉM PROSTŘEDÍ

*A. Volfová, J. Novák*

ČVUT v Praze, Fakulta stavební, katedra fyziky

**Článek se zabývá analýzou průchodu paprsků obecně nehomogenním izotropním optickým prostředím. V práci jsou zvoleny odlišné typy numerických metod pro řešení diferenciální rovnice paprsku a tyto metody jsou využity pro řešení této rovnice na zvolených případech nehomogenního prostředí. Výsledky numerických metod byly vzájemně porovnány a byla též provedena vizualizace průchodu paprsku zvoleným prostředím s využitím výpočetního prostředí MATLABu.**

## 1. Úvod

V praxi se lze velmi často setkat s opticky nehomogenním prostředím, ve kterém se index lomu mění s polohou a paprsky tudíž obecně nejsou přímkami jako je tomu v opticky homogenním prostředí, ale obecnými prostorovými křivkami. Tato vlastnost prostředí se v technických aplikacích projevuje buď negativním způsobem nebo je naopak pro určité aplikace s výhodou využívána. Naprosto nejběžnějším a velmi důležitým příkladem opticky nehomogenního prostředí je vzduch. Index lomu vzduchu při dané vlnové délce světla závisí na termodynamických stavových parametrech v jednotlivých bodech prostoru a na jeho chemickém složení. Uvedená závislost se nepříznivě projevuje zejména u optických měřicích a zobrazovacích přístrojů a metod. Například u geodetických měření je nutno provádět složité korekční výpočty pro získání správných hodnot měřených vzdáleností, úhlů, apod. V současné době se pro měření v inženýrské geodézii, stavebnictví a strojírenství používají převážně bezkontaktní optické měřicí metody, na jejichž základě byla zkonstruována řada přístrojů jako např. teodolity, nivelační přístroje, laserové systémy atd. Tyto měřicí přístroje jsou založeny na předpokladu, že světlo se šíří prostředím přímočaře a nedochází k ovlivňování jeho průchodu atmosférou. Proto je nutné, chceme-li dosáhnout určité přesnosti měření, provést analýzu vlivu opticky nehomogenního prostředí, ve kterém se měření uskutečňuje, na přesnost prováděného měření. Užitím diferenciální rovnice paprsku lze potom provést počítačovou simulaci procesu měření v daném místě a předem určit, za jakých podmínek lze dosáhnout požadované přesnosti měření. Nicméně, vhodně zvolené prostorové závislosti indexu lomu optického prostředí se naopak s výhodou využívá v oblasti gradientní optiky, kde jsou takové optické prvky používány pro specializované účely (např. jako gradientní optická vlákna či čočky).

Úkolem této práce bylo provedení numerické analýzy průchodu paprsků nehomogenním izotropním optickým prostředím. V práci byly zvoleny odlišné typy numerických metod pro řešení diferenciální rovnice paprsku a tyto metody byly použity pro řešení této rovnice na zvolených případech nehomogenního prostředí. Výsledky metod byly vzájemně porovnány a byla též provedena vizualizace průchodu paprsku zvoleným prostředím s využitím výpočetního prostředí MATLABu.

## 2. Diferenciální rovnice paprsku

Podle Maxwellovy elektromagnetické teorie je světlo elektromagnetické vlnění, které lze popsat pomocí tzv. vlnové rovnice [1-3]

$$\nabla^2 U(x, y, z, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U(x, y, z, t)}{\partial t^2}, \quad (1)$$

jež je základní rovnicí pro šíření vln v prostoru. V rovnici (1) funkce  $U(x, y, z, t)$  charakterizuje vlnové pole v prostoru a čase,  $v$  je rychlost šíření vlnění v daném prostředí a  $t$  je čas. V případě rovinné monochromatické vlny má funkce  $U(x, y, z, t)$  následující tvar

$$U(x, y, z, t) = A(x, y, z) e^{i\omega(t-\tau)}, \quad (2)$$

kde  $A(x, y, z)$  je amplituda a  $\varphi = \omega(t - \tau)$  fáze vlnění. Plochy konstantní fáze  $\varphi = \text{konst.}$  nazýváme vlnoplochy. V izotropním optickém prostředí jsou paprsky normálami k vlnoploše. Za čas  $\tau$  urazí světelný rozruch šířící se v prostředí o indexu lomu  $n$  rychlostí  $v$  dráhu  $L$ . Platí tedy

$$\tau = \frac{L}{v} = \frac{L \cdot n}{c} = \frac{S}{c},$$

kde  $c$  je rychlost šíření vlnění ve vakuu. Dosadíme-li za  $\tau$  do vztahu (2), potom obdržíme

$$U(x, y, z, t) = A(x, y, z) e^{i\omega\left(t - \frac{S(x, y, z)}{c}\right)}.$$

Funkce  $S(x, y, z)$  se obvykle nazývá charakteristickou funkcí resp. *eikonálem* [1,2]. Pro fázi vlnění tedy platí

$$\varphi = \omega \left[ t - \frac{S(x, y, z)}{c} \right]. \quad (3)$$

Jestliže ve vztahu (3) budeme považovat  $\varphi = \text{konst.}$ , potom nám tento vztah udává časovou změnu tvaru a polohy optické vlny. Považujeme-li kromě toho také čas za konstantní, tj.  $\varphi = \text{konst.}$ ,  $t = \text{konst.}$ , potom je (3) rovnicí vlnoplochy pro dané hodnoty  $\varphi$  a  $t$ . Jsou-li tedy hodnoty  $\varphi$ ,  $t$ ,  $\omega$  a  $c$  konstantní, musí být podle (3) i hodnota  $S = \text{konst.}$  Plochy definované rovnicí  $S(x, y, z) = \text{konst.}$  jsou tedy totožné s vlnoplochami. Položíme-li ve vztahu (3)  $\varphi = \text{konst.}$ , poté dostáváme diferenciací tohoto vztahu

$$dS = cd t. \quad (4)$$

Nechť značí  $\Sigma_1$  vlnoplochu v čase  $t$ . V čase  $t+dt$  zaujme vlnoplocha v prostoru polohu  $\Sigma_2$ . Šíření světla se děje (podle předpokladů geometrické optiky) ve směru normál k vlnoplochám. Nechť  $\overline{L_1 L_2}$  je jedna z těchto normál. Označíme-li  $dL$  nekonečně malou dráhu, kterou světlo urazilo mezi vlnoplochami  $\Sigma_1$  a  $\Sigma_2$  za čas  $dt$ , dostáváme

$$v = \frac{c}{n} = \frac{dL}{dt}, \quad dS = nd L.$$

Jak jsme si však již dříve řekli, uvažujeme paprsky jako normály k vlnoploše. Je tedy  $dS/dL$  derivací ve směru normály a platí pro ní vztah

$$\frac{dS}{dL} = |\text{grad } S| = n, \quad \text{resp.} \quad \text{grad } S = ns$$

kde  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$  je tečný vektor k paprsku. Jednoduchou úpravou získáme vztah

$$\left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = n^2, \quad (5)$$

pro eikonálovou rovnici [1,2], která je *základní rovnicí geometrické optiky*. Eikonál  $S(\mathbf{r})$  má fundamentální význam při vyšetřování šíření vlnoploch prostředím a při jejich transformaci při přechodu vlnění rozhraním dvou různých prostředí. Předchozí rovnici je možno též odvodit různými jinými způsoby, např. přímo z Maxwellových rovnic nebo z Fermatova principu [1-3].

*Paprsek* se definuje jako prostorová křivka, jejíž tečna v libovolném bodě křivky má směr Poyntingova vektoru, tj. je kolmá na vlnoplochu  $S(\mathbf{r}) = \text{konst.}$  Pro šíření paprsku nehomogenním izotropním prostředím lze z eikonálové rovnice pomocí známých pravidel vektorového a diferenciálního počtu odvodit [1-3]

$$\frac{d}{ds} \left[ n(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right] = \nabla n(\mathbf{r}). \quad (6)$$

Tato rovnice se nazývá rovnicí paprsku šířícího se opticky nehomogenním izotropním prostředím o indexu lomu  $n(\mathbf{r})$ . Rovnici paprsku můžeme přepsat do jiného tvaru a sice zavedením nové proměnné  $t$  (jiný parametr křivky, který již není obloukem) substitucí  $ds = n(\mathbf{r})dt$ . Rovnice (6) pak bude mít tvar

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = n(\mathbf{r})\nabla n(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\nabla n(\mathbf{r})^2 = \mathbf{g}(\mathbf{r}). \quad (7)$$

Předchozí diferenciální rovnici, popisující průchod paprsku izotropním prostředím, je možné využít pro praktické modelování šíření paprsků takovým optickým prostředím. Rovnici je možno řešit buď analyticky, nebo numericky.

### 3. Analytické řešení diferenciální rovnice paprsku – příklad

Analytické řešení rovnice paprsku v izotropním prostředí je možno nalézt pouze pro některé matematicky jednoduché prostorové závislosti indexu lomu prostředí. Pro ostatní případy, kdy by výpočet analytického řešení byl příliš složitý, nebo přímo nemožný, lze použít numerických metod. Avšak než se pustíme do řešení pomocí numerických metod, je dobré mít představu, nakolik jsou tyto metody přesné a efektivní pro použití v nějakém výpočetním softwaru. Je sice možné použít například jednu z nezákladnějších metod – tzv. Eulerovu metodu, avšak počet iterací k dosažení požadované přesnosti by mohl být velmi vysoký a tedy pro výpočetní software zbytečně zatěžující (resp. velikost kroku zvoleného u metody by byla zbytečně malá). Nastíníme si tedy více možných metod a jejich efektivitu a přesnost následně zhodnotíme podle analytického řešení.

Konkrétní případ, který pro tento problém použijeme bude tzv. Luneburgova čočka [4]. Luneburgova čočka je případ speciální kulové čočky z nehomogenního izotropního materiálu, jejíž prostorové rozložení hodnoty indexu lomu je sféricky symetrické, tj. platí

$$n(\mathbf{r}) = \sqrt{n_c^2 - \left(\frac{\mathbf{r}}{R}\right)^2} \delta n, \quad (8)$$

kde  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  je polohový vektor,  $n_c$  je hodnota indexu lomu ve středu čočky,  $R$  je poloměr kulové čočky a  $\delta n$  je koeficient, který vyjadřuje úbytek indexu lomu směrem od středu čočky k jejím okrajům. Pro gradient rozložení indexu lomu vypočteme

$$\nabla n(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{r}}{n(\mathbf{r})} \left(\frac{\delta n}{R}\right)^2 = -K^2 \frac{\mathbf{r}}{n(\mathbf{r})},$$

kde jsme označili  $K = \delta n / R$ . Potom diferenciální rovnice paprsku (7) nabývá v našem případě tvaru

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - K^2 \mathbf{r} = 0, \quad (9)$$

což je obyčejná homogenní diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty [5], jejíž řešení lze nalézt ve tvaru

$$\mathbf{r} = \mathbf{C}_1 e^{i\alpha_1 t} + \mathbf{C}_2 e^{-i\alpha_2 t}, \quad \mathbf{C}_1 = (C_{11}, C_{12}, C_{13}), \quad \mathbf{C}_2 = (C_{21}, C_{22}, C_{23}), \quad (10)$$

kde  $\alpha_{1,2} = \pm Ki$  jsou kořeny tzv. charakteristické rovnice příslušné dané homogenní diferenciální rovnici. Použijeme-li dobře známého Eulerova vztahu [5]

$$e^{\pm iKt} = \cos(Kt) \pm i \sin(Kt)$$

potom získané řešení můžeme zapsat jako

$$\mathbf{r} = (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2) \cos Kt + (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2) \sin Kt = \mathbf{A} \sin \mathbf{Q} \cos Kt + \mathbf{A} \cos \mathbf{Q} \sin Kt = \mathbf{A} \sin(Kt + \mathbf{Q}),$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} K \cos(Kt + \mathbf{Q}),$$

kde

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3), \quad \mathbf{Q} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3),$$

jsou vektory konstant. Budeme-li chtít zjistit jakou křivku v prostoru představuje předchozí zápis řešení, musíme vyloučit parametr  $t$  z předchozích vztahů. Získáme tak křivku popsanou rovnicí

$$\frac{z}{A_3} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{x}{A_1} \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + \frac{y}{A_2} \sin(\varphi_3 - \varphi_1),$$

což je obecný tvar rovnice elipsy v prostoru. V případě, že paprsek bude procházet rovinou  $x$ - $y$  ( $z = 0$ ), potom bude mít elipsa následující tvar

$$\sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) = \left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{A_1}\right)\left(\frac{y}{A_2}\right) \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

a hlavní osa této elipsy bude natočena vůči ose  $x$  o úhel

$$\tan 2\varphi = \frac{2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{A_1^2 - A_2^2}.$$

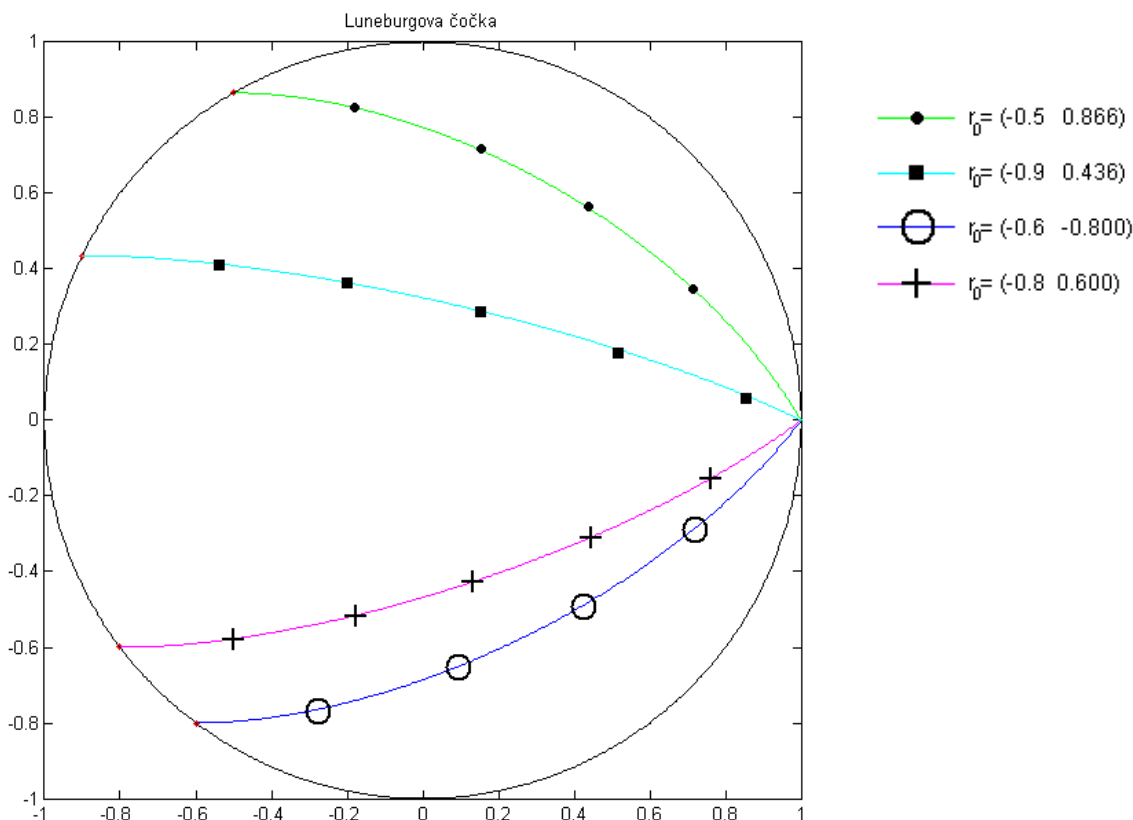
Jako příklad si nyní vypočteme řešení diferenciální rovnice paprsku pro Luneburgovu čočku, za počátečních podmínek  $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 = (1, 0, 0)$ ,  $x_0 = -\sqrt{R^2 - y_0^2}$ ,  $t_0 = 0$ ,  $n_c^2 = 2$  a  $K = 1$ . Dosazením těchto počátečních podmínek do vztahů pro souřadnice  $x$  a  $y$  dostáváme

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{A} \sin(Kt_0 + \mathbf{Q}), \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{A} K \cos(Kt_0 + \mathbf{Q}).$$

Úpravou předchozích vztahů obdržíme

$$A_1 = \sqrt{x_0^2 + 1/K^2}, \quad \varphi_1 = \arctan Kx_0, \quad A_2 = y_0, \quad \varphi_2 = \pi/2.$$

Předcházející vztahy nám dávají analytické řešení rovnice paprsku pro tento speciální případ. Na obr.1 je znázorněn chod paprsků v Luneburgově čočce v případě dopadu rovnoběžného svazku paprsků, vypočtený podle získaných vztahů.



**Obr.1:** Chod svazku paprsků (Luneburgova čočka) a jejich počáteční poloha

### 3. Numerické řešení diferenciální rovnice paprsku

V této části práce se zaměříme na popis a analýzu vybraných jednokrokových numerických metod pro řešení rovnice paprsku v izotropním prostředí. Jednotlivé metody jsou ilustrovány na uvedeném příkladu prostorového rozložení indexu lomu optického prostředí, který byl analyticky vyřešen v předchozí části. Jsou zde analyzovány pouze jednokrokové numerické metody (metoda Taylorova rozvoje a Ruge-Kuttovy metody) pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic ve vektorovém tvaru.

#### 3.1. Metoda Taylorova rozvoje pro řešení rovnice paprsku

První metoda [6-10] spočívá v tom, že se hledá řešení diferenciální rovnice (7) ve tvaru *Taylorovy řady*, tj.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \Delta t^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} \Delta t^3 + \dots$$

Pro směrový vektor paprsku  $\mathbf{u}$  a jeho derivace lze odvodit v našem případě následující vztahy:

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{K} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = n(\mathbf{r})\nabla n(\mathbf{r}), \quad \mathbf{L} = \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} = n(\mathbf{r})(\mathbf{u} \cdot \nabla n(\mathbf{r})) \cdot \nabla n(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r}) \frac{d(\nabla n(\mathbf{r}))}{dt},$$

$$\mathbf{M} = \frac{d^4\mathbf{r}}{dt^4} = \left\{ n(\mathbf{r})(\mathbf{u} \cdot \nabla n(\mathbf{r}))^2 + [\nabla n(\mathbf{r}) - \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla n(\mathbf{r}))] \cdot \mathbf{K} + n(\mathbf{r})\mathbf{u} \frac{d(\nabla n(\mathbf{r}))}{dt} \right\} \nabla n(\mathbf{r}) + 2n(\mathbf{r})(\mathbf{u} \cdot \nabla n(\mathbf{r})) \frac{d(\nabla n(\mathbf{r}))}{dt} + n(\mathbf{r}) \frac{d^2(\nabla n(\mathbf{r}))}{dt^2}.$$

Omezíme-li se v Taylorově rozvoji na členy do čtvrtého řádu, potom numerické řešení rovnice paprsku má následující tvar

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \mathbf{u}_i \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{K}_i \Delta t^2 + \frac{1}{6} \mathbf{L}_i \Delta t^3 + \frac{1}{6} \mathbf{M}_i \Delta t^4,$$

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \mathbf{K}_i \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{L}_i \Delta t^2 + \frac{1}{6} \mathbf{M}_i \Delta t^3.$$

Čím přesnější metodu bychom vyžadovali, tím bychom museli získávat vyšší stupně derivací polohového vektoru podle parametru  $t$ . Postup by byl analogický. Pro nejjednodušší případ Taylorova rozvoje, tzv. *Eulerova metoda*, dostáváme numerické řešení ve tvaru

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \mathbf{u}_i \Delta t, \quad \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \mathbf{K}_i \Delta t, \quad \mathbf{K}_i = n_i \nabla n_i.$$

Při numerickém výpočtu je nutno určit hodnoty funkce indexu lomu, jejího gradientu a vyšších prostorových derivací. Přesnost popsaných numerických metod závisí na volbě kroku změny parametru  $\Delta t$ . Čím menší zvolíme tuto hodnotu, tím vyšší přesnosti výpočtu dosáhneme, ovšem za cenu delší výpočetní doby. Nevýhody metod Taylorova rozvoje spočívají především v tom, že pro jejich aplikaci musíme umět vypočítat hodnoty příslušných derivací, což může být v mnoha praktických případech vysoce výpočetně náročné.

### 3.2. Runge-Kuttovy metody pro řešení rovnice paprsku

Nyní si popíšeme odlišný typ numerických metod pro řešení diferenciální rovnice paprsku, které ovšem vycházejí z podobné myšlenky jako metoda Taylorova rozvoje. Tyto metody se nazývají *Runge-Kuttovy metody* a v praxi jsou mezi jednokrokovými metodami řešení obyčejných diferenciálních rovnic často využívány [6-10]. Pro náš případ vektorové diferenciální rovnice druhého řádu mohou být zvoleny v zásadě dva přístupy. První případ spočívá v řešení soustavy dvou obyčejných rovnic prvního řádu aplikací klasických Runge-Kuttových metod, resp. modifikací těchto algoritmů na vektorový případ a odvození speciálních metod přímo pro diferenciální rovnici druhého řádu.

Z teorie obyčejných diferenciálních rovnic [5-10] je známo, že každou vektorovou diferenciální rovnici druhého řádu lze vhodnou substitucí převést na dvě vektorové diferenciální rovnice 1. řádu:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r}), \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{r}).$$

Řešení uvedené soustavy diferenciálních rovnic lze poté hledat některou ze známých numerických metod pro obyčejné diferenciální rovnice. Použijeme-li klasické Runge-Kuttovy vztahy [6-11] a provedeme numerické řešení stejným způsobem pro obě rovnice prvního řádu, pouze koeficienty v těchto vztazích se změní na vektory vzhledem k vektorovému řešení diferenciální rovnice. Numerické řešení s využitím klasické Runge-Kuttovy metody 4. řádu bude vypadat následovně:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{u}_n, & \mathbf{m}_1 &= \mathbf{g}(\mathbf{r}_n), \\ \mathbf{k}_2 &= (\mathbf{u}_n + \Delta t \cdot \mathbf{m}_1 / 2), & \mathbf{m}_2 &= \mathbf{g}(\mathbf{r}_n + \Delta t \cdot \mathbf{k}_1 / 2), \\ \mathbf{k}_3 &= (\mathbf{u}_n + \Delta t \cdot \mathbf{m}_2 / 2), & \mathbf{m}_3 &= \mathbf{g}(\mathbf{r}_n + \Delta t \cdot \mathbf{k}_2 / 2), \\ \mathbf{k}_4 &= (\mathbf{u}_n + \Delta t \cdot \mathbf{m}_3), & \mathbf{m}_4 &= \mathbf{g}(\mathbf{r}_n + \Delta t \cdot \mathbf{k}_3), \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{6} (\mathbf{m}_1 + 2\mathbf{m}_2 + 2\mathbf{m}_3 + \mathbf{m}_4),$$

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \frac{\Delta t}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4).$$

Obdobným způsobem lze postupovat dále u metod jiného řádu. Tj. lze použít odvozené algoritmy metod typu Runge-Kutta a převést je do vektorového tvaru. Nicméně při praktických výpočtech se ukazuje, že další zvyšování řádu u metod vyšších řádů již není tak efektivní, jak je tomu u algoritmů nižších řádů (při mírném zvýšení přesnosti výpočtu dochází ke značnému zvyšování výpočetní náročnosti). Uvedené Runge-Kuttovy algoritmy pro soustavu dvou rovnic lze ještě přepsat pro přímé použití pro řešení diferenciální rovnice druhého řádu. Tím můžeme dále optimalizovat výpočetní algoritmus. Například pro klasickou metodu Runge-Kutta 4. řádu tak získáme

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{g}(\mathbf{r}_n), \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{g}(\mathbf{r}_n + \Delta t \cdot \mathbf{u}_n / 2), \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{g}(\mathbf{r}_n + \Delta t \cdot \mathbf{u}_n / 2 + \Delta t^2 \cdot \mathbf{k}_1 / 4), \\ \mathbf{k}_4 &= \mathbf{g}(\mathbf{r}_n + \Delta t \cdot \mathbf{u}_n + \Delta t^2 \cdot \mathbf{k}_2 / 2), \\ \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \\ \mathbf{r}_{n+1} &= \mathbf{r}_n + \Delta t \cdot \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t^2}{6} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3). \end{aligned}$$

Obdobně bychom mohli získat vztahy pro jiné řády Runge-Kuttových metod. Jiným způsobem získání algoritmů pro přímé použití na řešení vektorové diferenciální rovnice druhého řádu může být využití speciálních metod typu Runge-Kutta [11]. Například pro metodu 4. řádu dostáváme

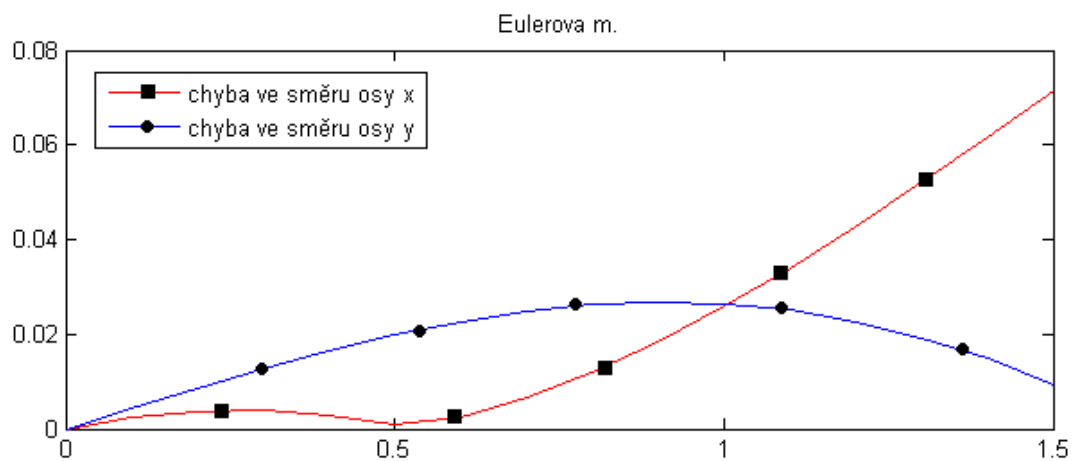
$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{g}(\mathbf{r}_n), \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{g}(\mathbf{r}_n + \Delta t \cdot \mathbf{u}_n / 2 + \Delta t^2 \cdot \mathbf{k}_1 / 8), \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{g}(\mathbf{r}_n + \Delta t \cdot \mathbf{u}_n / 2 + \Delta t^2 \cdot \mathbf{k}_1 / 8), \\ \mathbf{k}_4 &= \mathbf{g}(\mathbf{r}_n + \Delta t \cdot \mathbf{u}_n + \Delta t^2 \cdot \mathbf{k}_3 / 2), \\ \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \\ \mathbf{r}_{n+1} &= \mathbf{r}_n + \Delta t \cdot \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t^2}{6} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3). \end{aligned}$$

Je samozřejmě možné odvodit velké množství výpočetních algoritmů metod Runge-Kutta různého řádu. Pro analýzu v této práci byly odvozeny a použity Runge-Kuttovy metody druhého až pátého řádu, které jsou při praktických výpočtech nejčastěji užívány.

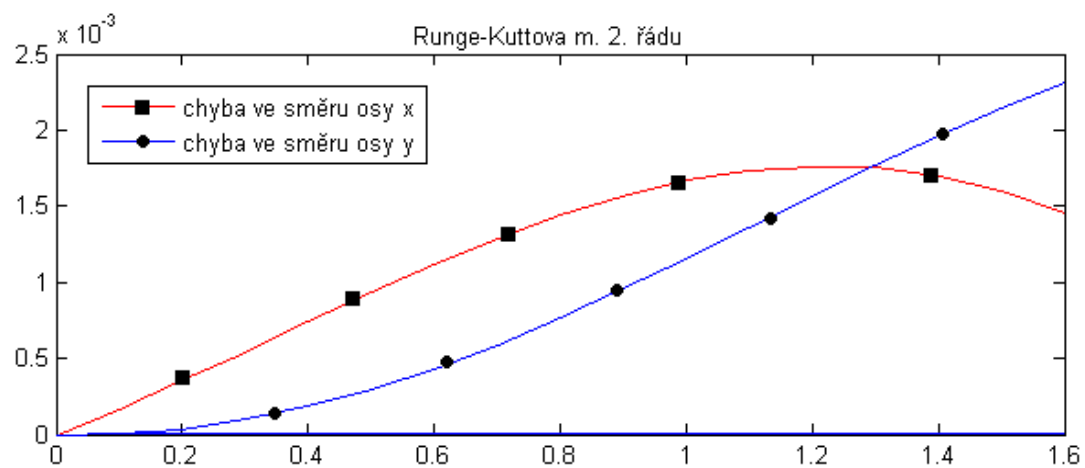
#### 4. Analýza numerických metod pro řešení rovnice paprsku

Přesnost popsaných numerických metod závisí na volbě kroku změny parametru  $\Delta t$ . Čím menší zvolíme tuto hodnotu, tím vyšší přesnosti výpočtu dosáhneme, ovšem za cenu delší výpočetní doby.

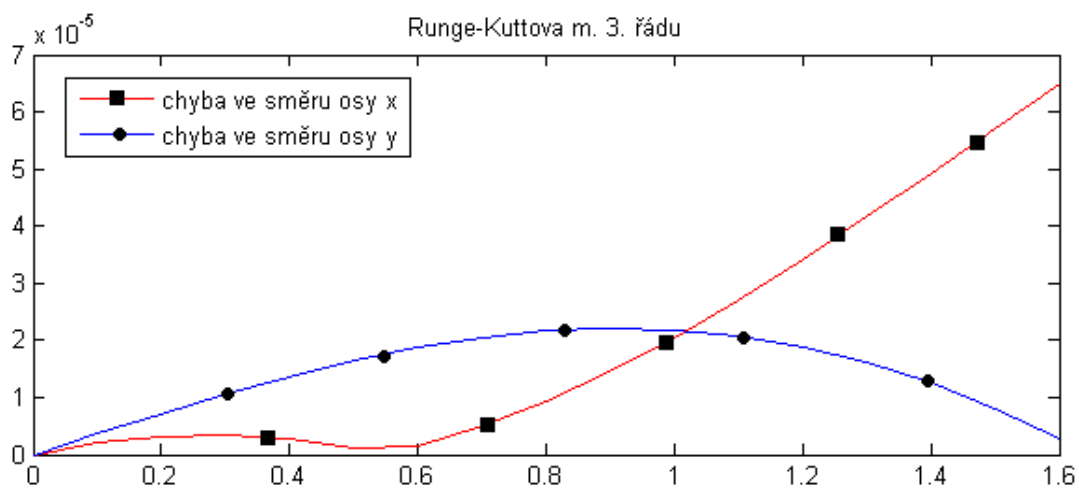
Uveďme si zde výsledky analýzy pro případ nehomogenního izotropního prostředí, který jsme zmínili v předchozí části této práce. Metody byly porovnávány na základě dosažené maximální absolutní hodnoty chyby  $\mathbf{E}$  a velikosti iteračního kroku  $\Delta t$ . Hodnota chyby je počítána jako rozdíl přesného (analytického) a přibližného řešení. Průběh závislosti absolutní hodnoty chyby při velikosti kroku  $\Delta t = 0.1$  pro porovnávané metody Runge-Kutta 2. -5. řádu (označeny RK2-RK5), Eulerovy metody (označena EUL) a metody Taylorova rozvoje 3. stupně (T3) je zobrazen na obr. 2 - 7.



Obr. 2: Hodnota chyb v Eulerově metodě

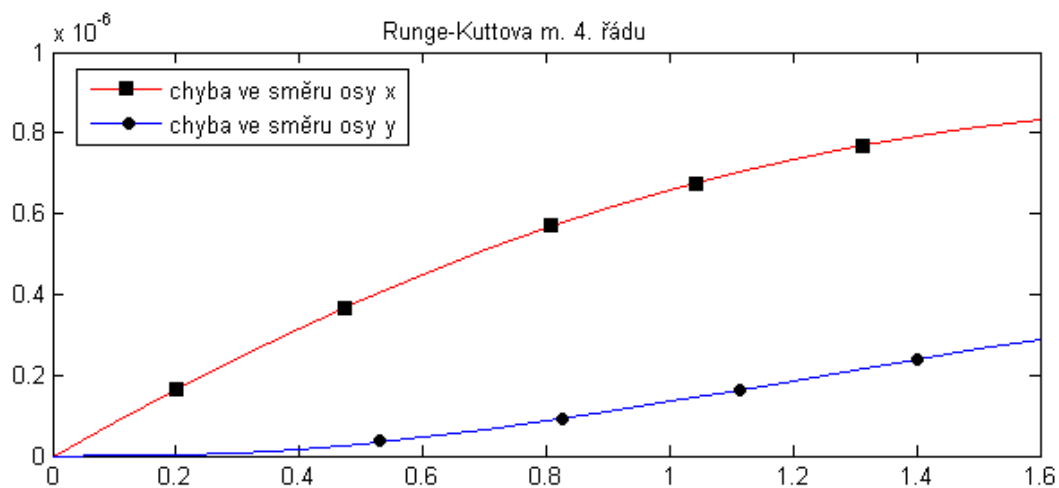


Obr. 3: Hodnota chyb v Runge-Kuttově metodě 2. řádu

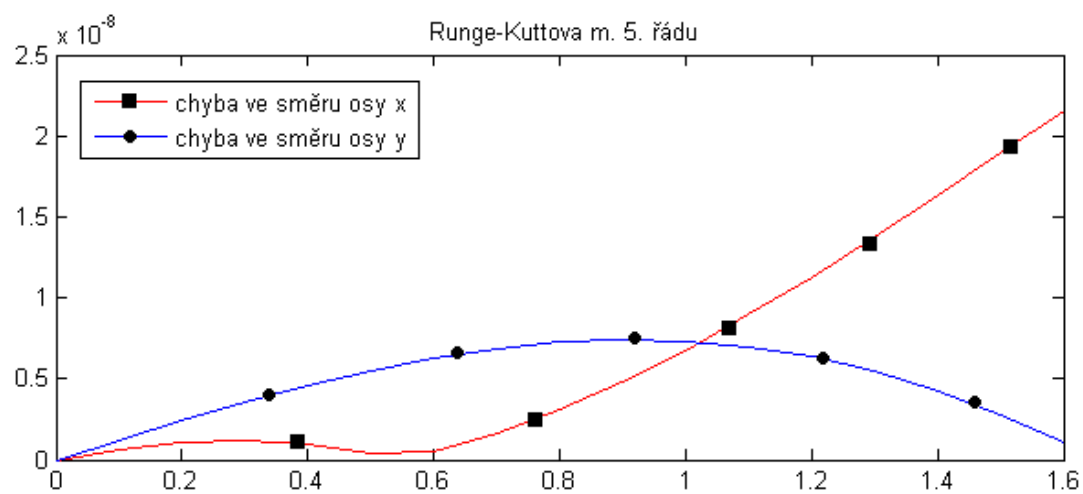


Obr. 4: Hodnota chyb v Runge-Kuttově metodě 3. řádu

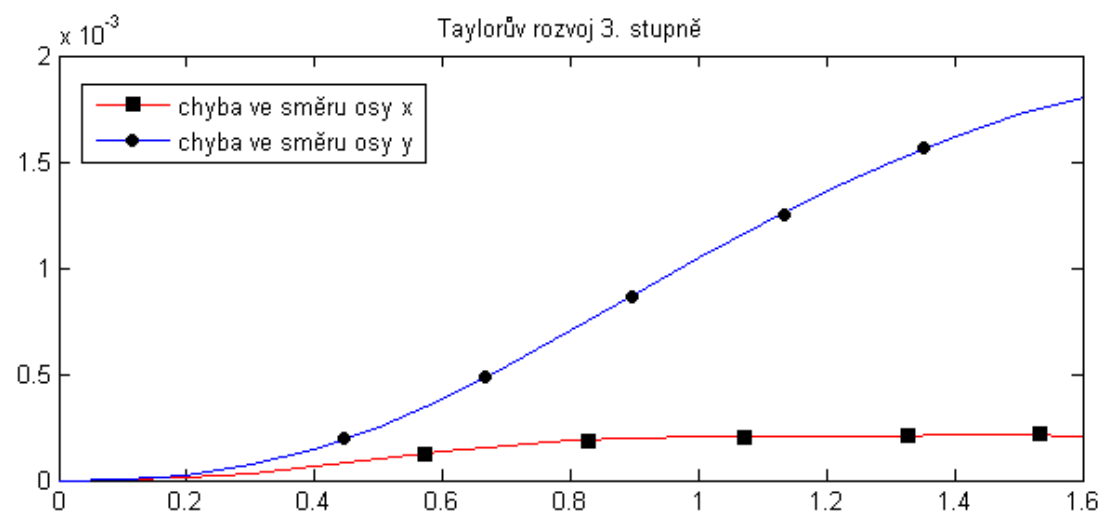




Obr. 5: Hodnota chyb v Runge-Kuttově metodě 4. řádu



Obr. 6: Hodnota chyb v Runge-Kuttově metodě 5. řádu



Obr. 7: Hodnota chyb ve směru souřadných os v metodě Taylorova rozvoje 3. stupně

Velikost maximální absolutní hodnoty chyby  $E$  v závislosti na velikosti integračního kroku  $\Delta t$  je pro jednotlivé uvažované metody ukázána v tabulce 1. Dále bylo provedeno srovnání jednotlivých numerických algoritmů podle časové náročnosti výpočtu na stejný počet kroků  $N$ . Relativní časovou náročnost metod v procentech je uvedena v tabulce 2, přičemž Eulerova metoda je brána jako základ (100%).

Tab.1: Maximální absolutní hodnota chyby numerických metod

krok $\Delta t$	Numerické metody					
	RK2	RK3	RK4	RK5	EUL	T3
0.01	2.3e-005	6.6e-008	8.7e-011	2.2e-013	7.8e-003	7.7e-005
0.02	9.1e-005	5.2e-007	1.4e-009	7.0e-012	1.5e-002	1.7e-004
0.03	2.1e-004	1.8e-006	7.0e-009	5.3e-011	2.2e-002	3.0e-004
0.05	5.8e-004	8.3e-006	5.4e-008	6.9e-010	3.8e-002	6.2e-004
0.07	1.1e-003	2.3e-005	2.0e-007	3.7e-009	5.3e-002	1.0e-003
0.10	2.3e-003	6.5e-005	8.3e-007	2.2e-008	7.1e-002	1.8e-003
0.15	5.4e-003	2.3e-004	4.1e-006	1.7e-007	1.1e-001	3.6e-003
0.20	9.2e-003	5.0e-004	1.3e-005	6.5e-007	1.2e-001	5.9e-003

Tab.2: Relativní časová náročnost metod (%)

Numerické metody						
RK2	RK3	RK4	RK5	EUL	T3	
127	155	182	226	100	242	

## 5. Závěr

V příspěvku byl stručně nastíněn teoretický popis analýzy průchodu paprsků nehomogenním izotropním optickým prostředím. V práci byly zvoleny odlišné typy numerických metod pro řešení diferenciální rovnice paprsku a tyto metody jsou využity pro řešení této rovnice na zvoleném případě optického prostředí (sférická čočka z gradientního optického materiálu). Výsledky numerických metod byly vzájemně porovnány a byla provedena vizualizace průchodu paprsku zvoleným prostředím s využitím výpočetního prostředí MATLAB.

## Literatura

- [1] A.Mikš: *Aplikovaná optika 10 - Geometrická a vlnová optika*. Vydavatelství ČVUT, Praha 2000.
- [2] M.Born, E.Wolf: *Principles of optics, 6th ed.* Pergamon Press, New York 1980.
- [3] B.E.A.Saleh, C.M.Teich: *Základy fotoniky*. Matfyzpress, Praha 1994.
- [4] R.K.Luneburg: *Mathematical theory of optics*, University of California Press, 1964.
- [5] K.Rektorys a kol.: *Přehled užití matematiky*. Prometheus, Praha 1995.
- [6] B. P.Děmidovič, I. A.Maron: *Základy numerické matematiky*. SNTL, Praha 1966
- [7] A.Ralston: *Základy numerické matematiky*. Academia, Praha 1978
- [8] P.Přikryl: *Numerické metody matematické analýzy*. Nakl. techn. lit., Praha 1985
- [9] E.Vitásek: *Numerické metody*. Nakl. techn. lit., Praha 1987
- [10] E.Vitásek: *Základy teorie numerických metod pro řešení diferenciálních rovnic*. Academia, Praha 1994
- [11] M.Abramowitz, I.A.Stegun: *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover, New York 1965

---

Adéla Volfová, FSv ČVUT v Praze, Thákurova 7, 16629 Praha 6, email: volfova.adela@seznam.cz

Ing.Jiří Novák, Ph.D., katedra fyziky, FSv ČVUT v Praze, Thákurova 7, 16629 Praha 6, email: novakji@fsv.cvut.cz