

VÝPOČET FREKVENČNÍCH SPEKTER SIGNÁLU UŽITÍM JEHO AUTOREGRESNÍHO MODELU

Jiří Tůma

VŠB – TU Ostrava, Fakulta strojní, Katedra ATR

Abstract

The paper deals with a time domain method to determine signal spectra based on signal fitting by an autoregressive model (AR) using the MATLAB System Identification Toolbox.

Klíčová slova: signál, frekvenční spektrum, autoregresní model

Úvod

Nejrozšířenější postup výpočtu spektra signálu využívá rychlou Fourierovu transformaci (FFT) pro vzorkované záznamy s délkou, která je rovna mocnině dvou. Záznamy s délkou odlišnou od mocniny dvou je třeba prodloužit doplněním nulami nebo zkrátit na požadovanou délku. Rovněž je možné záznam převzorkovat na počet vzorků, který je roven mocnině dvou. Jiný postup výpočtu se opírá o autoregresní model. Tento model může být vypočítán pro záznamy s délkou větší nebo rovnou jeho řádu. Omezení vyplývá pouze z vlastností signálu, pro který lze danými prostředky autoregresní model vypočítat. Algoritmy implementované v identifikačním toolboxu MATLABu požadují, aby signál byl stacionární, centrováný a bez lineárního trendu.

Souvislost spojitého a diskrétního signálu

Každý spojitý signál lze považovat za výstupní veličinu nějakého spojitého dynamického systému řádu $2m$, který má v Laplaceově transformaci přenosovou funkci tvaru

$$G(s) = \sum_{i=1}^m \left[\frac{r_i}{s - s_i} + \frac{r_i^*}{s - s_i^*} \right], \quad (1)$$

kde je s_i - jsou póly přenosu, r_i - jsou rezidua příslušné k pólům s_i a s_i^* , r_i^* jsou komplexně sdružené veličiny k s_i a r_i . V případě, že na vstup tohoto systému působí bílý šum, spektrum jeho výstupního signálu je tvarováno frekvenčním přenosem. Shodný tvar spektra jako bílý šum má jednotkový (Diracův) impuls s $X(s)=1$. K demonstraci souvislosti spojitého a diskrétního času bude použita impulsní odezva, tj. deterministický signál. Z rovnice (1) plyne, že Laplaceově obrazu odezvy systému na jednotkový impuls, $Y(s) = G(s)X(s) = G(s)$, přísluší pro $t \geq 0$ funkce

$$y(t) = \sum_{k=1}^m \left(r_k \exp(s_k t) + r_k^* \exp(s_k^* t) \right). \quad (2)$$

Spojitý signály se zaznamenávají obvykle jen v podobě ekvidistantních vzorků. Spojitý čas je při vzorkování nahrazen diskrétním časem $t = kT$, kde $k = 0, 1, 2, \dots$ jsou celá kladná čísla a T je vzorkovací interval. Funkci spojitého času (2) lze pro diskrétní čas přepsat do tvaru

$$y_k = \sum_{i=1}^m (r_i \exp(s_i kT) + r_i^* \exp(s_i^* kT)) = \sum_{i=1}^m (r_i z_i^k + r_i^* z_i^{*k}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Poslední vzorec představuje řešení diferenční rovnice

$$y_k = -a_1 y_{k-1} - \dots - a_n y_{k-n} \quad (4)$$

řádu $2m = n$ s reálnými parametry $a_i, i = 1, \dots, n$. Pro časové řady se diferenční rovnice (4) nazývá autoregresní model (AR). Obecně komplexní čísla $z_i, i = 1, \dots, n$ jsou kořeny charakteristického polynomu, který přísluší diferenční rovnici (4)

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n = 0. \quad (5)$$

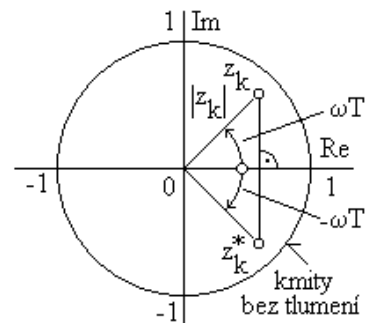
Souvislost kořenů polynomu (5) a pólů přenosu (1) je následující

$$z_i = \exp(s_i T) = \exp((- \sigma_i + j \omega_i) T), \quad s_i = \frac{1}{T} \ln(z_i) = \frac{1}{T} (\ln(|z_i|) + j \arg(z_i)). \quad (6)$$

V posledním vzorci označuje funkce $\arg(\cdot)$ úhel průvodiče pólu s reálnou osou. Pro konstantu doznívání σ_i a úhlovou frekvenci ω_i platí

$$\sigma_i = -\frac{1}{T} \ln(|z_i|), \quad \omega_i = \frac{1}{T} \arg(z_i). \quad (7)$$

Protože je předpokládáno, že charakteristický polynom má reálné parametry, jeho kořeny jsou buď reálné nebo tvoří dvojice vzájemně sdružených komplexních čísel. Řešení diferenční rovnice (4) je stabilní, jestliže všechny kořeny polynomu (5) leží uvnitř jednotkové kružnice - viz obr. 1. Úhel ωT je z důvodu Shannon-Kotelnikova vzorkovacího teorému omezen na interval od nuly do π radiánů. Kořeny ležící na reálné ose komplexní roviny odpovídají složkám odezvy, které doznívají bez kmitání. Z podmínky stability vyplývá, že $\sigma_i > 0$. Čím blíže je poloha kořenu k jednotkové kružnici, tím méně je kmitání tlumeno.



Obr. 1 Poloha kořenů charakteristického polynomu v komplexní rovině z

Výpočet parametrů autoregresního modelu na příkladu

Postup výpočtu je demonstrován na příkladu záznamu zvukové odezvy mechanického systému [1]. Zvukový signál obsahuje 8200 vzorků, které jsou zaznamenány se vzorkovací frekvencí 20 kHz do souboru typu ASCII se jménem *odezva.asc* jako sloupcový vektor. Načtení posloupnosti akustických tlaků v [Pa] do prostředí MATLABu je příkazem

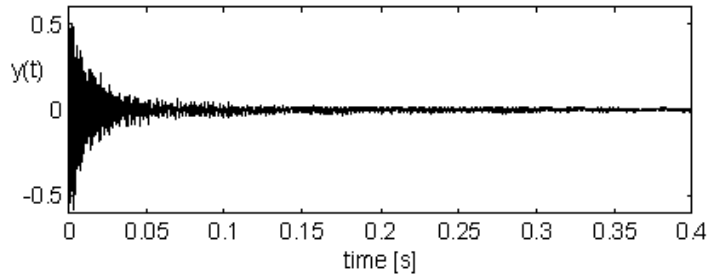
» load odezva.asc

Načtená data se uloží do proměnné s názvem *odezva*. Před výpočtem parametrů AR modelu je vhodné je třeba ze signálu odstranit lineární trend a současně jej centrovat pomocí funkce *detrend*. Příkaz MATLABu je následující

» y=detrend(odezva);

Časový průběh odezvy po odstranění trendu a nulování centrování je znázorněn v obr. 2. Pro výpočet parametrů autoregresního modelu jsou v identifikačním toolboxu Matlabu k dispozici dvě funkce, a to *ar* a *ivar*. V tomto referátu je demonstrováno použití funkce *ar*, která obsahuje řadu metod. Při zadání výpočtu je třeba některou z těchto metod vybrat a především rozhodnout o velikosti řádu n diferenční rovnice, popřípadě o počtu vzorků signálu, které se pro

výpočet použijí. Bez bližšího popisu se jedná o například o metodu nejmenších čtverců, Yule-Walkerovu metodu, Burgovu metodu a jiné. Počet vzorků musí být z důvodu řešitelnosti soustavy lineárních rovnic větší než zvolený řád diferencní rovnice. V demonstračním příkladě je k výpočtu použit celý záznam. Samotná volba řádu modelu, tj. řádu přenosu (1) je otevřený problém modální analýzy.



Obr. 2 Časový průběh signálu

Proměnná y , představující vektor dat, se zadává jako první parametr procedury `ar`. Dalším parametrem procedury `ar` je řád modelu, zde je zvoleno 20. Předposlední parametr (*approach*) určuje metodu výpočtu. Jak již bylo uvedeno, lze ji vybrat z následujícího výčtu

- 'fb' : The forward-backward approach (default)
- 'ls' : The Least Squares method
- 'yw' : The Yule-Walker method
- 'burg' : Burg's method
- 'gl' : A geometric lattice method.

Poslední parametr funkce `ar` určuje typ okna (předvolený typ je „bez okna“). Protože při volání matlabovských funkcí není třeba uvádět všechny parametry, lze poslední dva parametry vynechat. Příklad příkazu užívajícího metodu Yule-Walkera je následující.

```
» th20=ar(y,20,'yw');
```

Přesnost modelu je hodnocena rozptylem jeho chyby (Loss fcn). V kritériu podle Akaike je navíc obsažen vliv řádu modelu. Toto kritérium lze použít k hodnocení voleb různých řádů modelu. Pro řád 20 jsou chyby modelů vypočtených podle uvedených metod následující:

Approach	fb	ls	yw	Burg	Gl
Loss fcn	3.14×10^{-5}	2.92×10^{-5}	3.79×10^{-5}	3.26×10^{-5}	3.26×10^{-5}

Protože cílem referátu není vyhledání optimálního řádu modelu, byly vypočteny parametry také pro řád 100. Výsledek výpočtu je v tzv. formátu *theta*. Výsledek lze prohlédnout užitím příkazu

```
» present(th20)
```

```
This matrix was created by the command AR on 3/7 1999 at 15:47
Loss fcn: 0.00003789 Akaike's FPE: 0.00003808 Sampling interval 1
The polynomial coefficients and their standard deviations are
```

```
A =
```

```
Columns 1 through 7
```

```
1.0000 -1.8991 2.1578 -1.6911 0.8568 -0.1430 -0.2246
0 0.0073 0.0156 0.0222 0.0254 0.0261 0.0260
```

```
Columns 8 through 14
```

```
0.0936 0.2474 -0.3788 0.3638- 0.0948 -0.0944 0.2007
0.0261 0.0260 0.0261 0.0262 0.0262 0.0261 0.0260
```

```
Columns 15 through 21
```

```
-0.1809 0.1875 -0.2756 0.3301 0.0266 -0.3191 0.1329
0.0261 0.0260 0.0261 0.0254 0.0222 0.0156 0.0073
```

Ve výpise příkazem `present` je uvedena zmíněná přesnost modelu (Loss fcn), kritérium podle Akaikeho a přesnost jednotlivých koeficientů modelu. Hodnoty koeficientů jsou

v prvním řádku matice A a jejich přesnosti ve směrodatné odchylce jsou ve druhém řádku. Velikost prvního parametru je implicitně 1, a proto je jeho chyba nula. Přesnost (Loss fcn) modelu 20. řádu (AR20) je 0.000036 a modelu 100. řádu (AR100) je 0.000013.

Pro vykreslení frekvenčních charakteristik je zapotřebí změnit přednastavenou vzorkovací periodu o velikosti 1 na skutečnou hodnotu. Pro vzorkovací frekvenci 20 kHz se vzorkovací perioda doplní do dat $th20$ o formátu $theta$ příkazem

```
» th20=sett(th20,1/20000);
```

Frekvenční spektra se vykreslují příkazem `ffplot`. Parametr této funkce je obecně vektor několika spekter, které se vykreslí do jednoho grafu současně. Spektrum $sp20$ příslušné autoregresnímu modelu 20. řádu se vypočte z dat $th20$ o formátu $theta$ příkazem

```
» sp20=th2ff(th20);
```

Je vhodné, aby se toto spektrum porovnálo se spektrem, které bylo vypočteno užitím FFT. Příslušný příkaz k výpočtu amplitud FFT spektra je následující:

```
» G=etfe(y(1:1024),[],[],1/20000);
```

V posledním příkaze má čtvrtý parametr již výše popsáný význam vzorkovací periody. Druhý a třetí parametr (souvisí s počtem bodů frekvenční stupnice, ve kterých se FFT počítá) se ponechávají přednastavené. Vykreslení grafu se dvěma funkcemi (výsledek výpočtu FFT a spektra příslušného k AR20) je příkazem

```
» ffplot([G sp20])
```

Kromě grafu se spektrem podle AR20 a FFT je v obr. 3 také graf se spektrem podle AR100 a FFT. Nejen podle chyby modelu, ale také podle průběhu spektra vyplývá, že zvýšení řádu AR modelu znamená zpřesnění modelu. Nízký řád způsobí vyhlazení spektra.

Frekvenční spektrum lze doplnit informativním vykreslením polohy kořenů polynomu (5), tj. pólů přenosu (1), uvnitř jednotkové kružnice. K tomuto grafu je však třeba nejprve souřadnice těchto pólů vypočítat a to příkazem

```
» [zpo20,K20]=th2zp(th20);
```

Matice $zpo20$ obsahuje póly (a obecně také nuly přenosu) a proměnná K je statické zesílení soustavy (1). Uspořádání matice $zpo20$ není podstatné. Příkazem

```
» zpplot(zpo20)
```

se vykreslí příslušný graf (viz obr. 4). Pro případ, že je třeba porovnat polohy kořenů dvou polynomů (případně pólů a nul přenosu) například v maticích $zpo20$ a $zpo50$, lze použít příkaz

```
» zpplot(zpform(zpo20,zpo100))
```

Z výsledků výpočtu je třeba extrahovat údaje o vlastních frekvencích a příslušných tlumeních. K tomuto účelu je potřeba konvertovat data v $theta$ formátu na parametry autoregresního modelu

```
» [par20,P20]=th2par(th20);
```

Výsledkem výpočtu je 20 parametrů (tj. a_1 až a_{20} pro model s řádem 20) ve vektoru $par20$ a jejich kovarianční matice v $P20$. Parametry polynomu ve vektoru $par20$ je zapotřebí doplnit parametrem a_0 , který je roven 1, aby výsledný vektor byl A . Proto

```
» A20=[1,par20];
```

Kořeny polynomu lze vypočítat příkazem

```
» kor20=roots(A20);
```

U všech kořenů lze pak určit absolutní hodnotu $Akor20$ a úhel $Pkor20$ příkazy

```
» Akor20=abs(kor20);
```

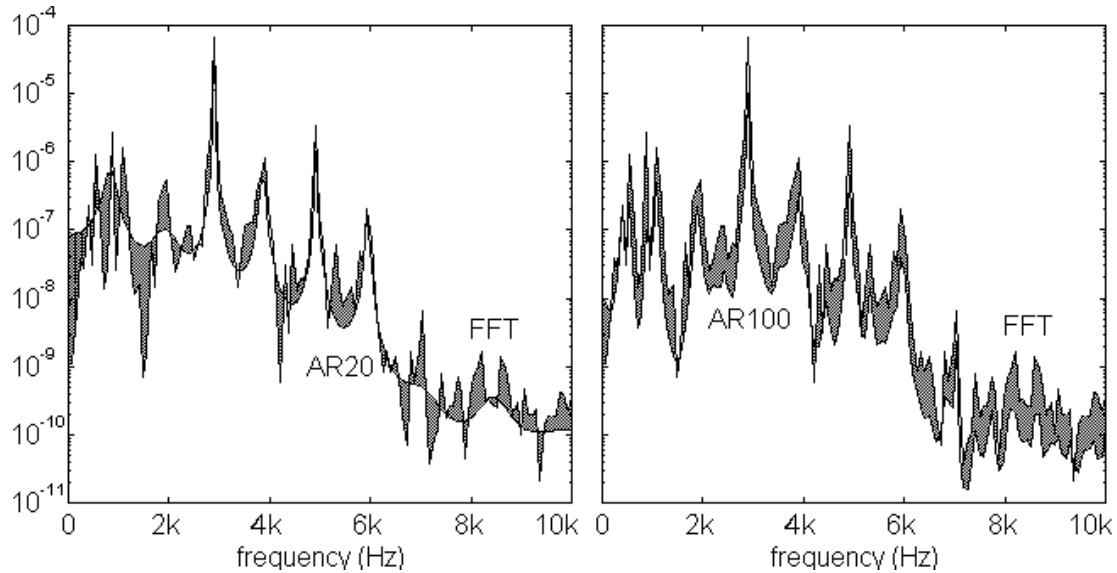
» $P_{kor20} = \text{angle}(kor20)$;

Vlastní frekvence a konstanta dozívání se vypočítají vydělením absolutní hodnoty a fáze vzorkovací periodou. Pro uvedený příklad s 20 kHz je použito

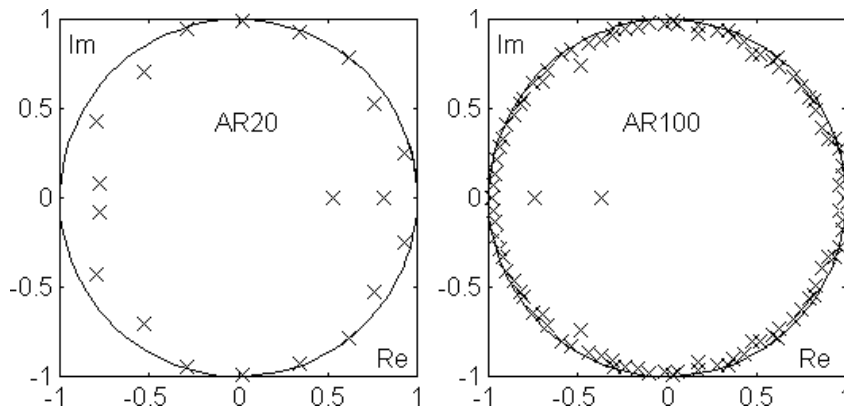
» $\Omega_{20} = P_{kor20} * 20000$;

» $\Sigma_{20} = -\log(A_{kor20}) * 20000$;

Tímto jsou vypočteny oba rozhodující parametry rezonančních vrcholů spektra.



Obr. 3 Frekvenční charakteristiky získané výpočtem FFT a AR modelu řádu 20 a 100



Obr. 4 Polohy nul přenosu podle AR modelu řádu 20 a 100

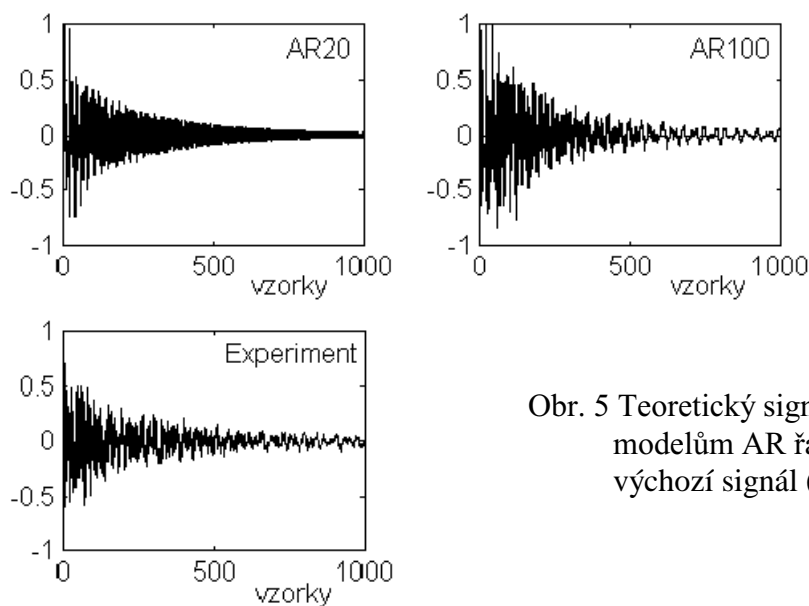
Přesnost aproximace autoregresním modelem lze posoudit znázorněním časového průběhu signálu. Nejprve je však třeba transformovat popis modelu v *theta* formátu na přenosovou funkci s polynomem v čitateli ($NUM20$) a jmenovateli ($DEN20$) příkazem

» $[NUM20, DEN20] = \text{th2tf}(\text{th20})$;

Časový průběh signálu příslušejícího impulsní charakteristice diskrétní soustavy se vykreslí příkazem

» $\text{dimpulse}(NUM20, DEN20)$

Teoretický časový průběh signálu příslušejícího modelům AR20 a AR100 společně s výchozím signálem je na obr. 6. Místo časového měřítka je použito pořadí vzorků.



Obr. 5 Teoretický signál, který přísluší modelům AR řádu 20 a 100, a výchozí signál (Experiment)

Závěr

Příspěvek popisuje postup výpočtu spektra signálu užitím nástrojů z identifikačního toolboxu MATLABu. Spektrum je vypočteno prostřednictvím autoregresního modelu. Hlavním problémem je volba řádu tohoto modelu. Použití autoregresního modelu je vhodné zejména v případech, kdy počet vzorků není roven mocnině dvou nebo volbou řádu modelu je třeba spektrum vyhladit. Příklad demonstrující obecný postup se týkal deterministické odezvy dynamické soustavy. Shodným postupem lze určit spektrum náhodného signálu.

Literatura

- [1] Ondrouch, J. - Kaňák, J.: Posuzování útlumu hluku železničních kol In: Conference Engineering Mechanics '98. Svatka, Czech Republic, May 11 - 14, s. 553 - 556.
- [2] Tůma, J.: Použití amplitudové demodulace k měření útlumu kmitání mechanických systémů. In: Conference Engineering Mechanics '97. Svatka, Czech Republic, May 12 - 15, 1997, pp. 215-220.

Adresa autora:

Doc. Ing. Jiří Tůma, CSc., VŠB TU Ostrava, Fakulta strojní, Katedra K 352, tř. 17. listopadu, 708 33 Ostrava - Poruba, e-mail: jiri.tuma@vsb.cz