

SIMULACE SPOLEHLIVOSTI SYSTÉMŮ HROMADNÉ OBSLUHY

Michal Dorda

VŠB - TU Ostrava, Fakulta strojní, Institut dopravy

1 Úvod

V běžné technické praxi se velice často setkáváme s tzv. systémy hromadné obsluhy, aniž si to v podstatě uvědomujeme. Za systém hromadné obsluhy (dále jen SHO) lze považovat každý systém, k němuž přicházejí požadavky (zákazníci) na obsluhu v systému. Pro SHO je charakteristické, že jsou tvořeny jednou nebo několika obslužnými linkami (mohou být řazeny sériově, paralelně nebo kombinovaně), které provádějí požadovaný způsob obsluhy. Po provedení obsluhy zákazníci opouštějí systém. V některých systémech hromadné obsluhy se připouští existence fronty, ve které se shromažďují požadavky čekající na obsluhu. Podrobnější členění SHO lze nalézt v odborné literatuře - viz např. [1], [2].

Při matematickém modelování systémů hromadné obsluhy se zpravidla z důvodů zjednodušení popisu tohoto modelu předpokládá, že daný systém pracuje bez poruch, tedy se předpokládá, že nemůže docházet k poruchám obslužných linek. V praxi ovšem tento předpoklad neplatí, neboť jako u každého technického zařízení i u obslužných linek hromadné obsluhy může dojít k poruše, což má za následek dočasný výpadek dané linky z provozu. Uvažováním možnosti výskytu poruch obslužných linek je možno se více přiblížit modelované realitě. Na druhou stranu je ovšem třeba říct, že analytické řešení nespolehlivých SHO je zpravidla podstatně obtížnější než řešení odpovídajících spolehlivých SHO.

Analyticky ovšem nelze vyřešit jakýkoliv SHO. V tomto případě lze s úspěchem využít v dnešní době velice rozšířené simulační nástroje, např. právě software Witness. Simulační nástroje mají sice také své nevýhody (např. užití pseudonáhodných čísel), nicméně v případech, kdy nejsou analytické nástroje k modelování SHO k dispozici, je simulace jediným prostředkem k získání relevantních výsledků. Simulaci lze také použít k ověření správnosti výsledků získaných analyticky.

Předkládaný příspěvek si klade za cíl konfrontovat výsledky získané řešením matematického modelu konkrétního nespolehlivého SHO s výsledky získanými simulací v prostředí Witness a ověřit tak vhodnost použití Witness k simulaci těchto úloh.

2 Formulace problému a jeho analytické řešení

Uvažujme jednoduchý Markovův nespolehlivý systém hromadné obsluhy tvořený jednou obslužnou linkou a jedním místem ve frontě. V systému se mohou nacházet maximálně dva zákazníci najednou. V případě, že přicházející zákazník v okamžiku svého příchodu k systému nachází v SHO právě dva zákazníky, je odmítnut a opouští systém neobsloužen. Proud zákazníků ucházejících se o obsluhu v systému je Poissonův s parametrem vstupního toku λ (střední počet zákazníků ucházejících se o vstup do systému za jednotku času), mezery mezi příchody po sobě jdoucích zákazníků jsou potom exponenciální náhodnou proměnnou se střední hodnotou $\frac{1}{\lambda}$. Doba obsluhy jednoho požadavku se řídí exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti se střední hodnotou $\frac{1}{\mu}$ (převrácenou hodnotu μ nazýváme parametr obsluhy). Proud poruch obslužné linky budeme rovněž považovat za Poissonův s parametrem $\bar{\lambda}$ (doba mezi poruchami je opět exponenciální náhodná proměnná se střední hodnotou rovnou $\frac{1}{\bar{\lambda}}$). Doba opravy linky se bude řídit

exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti se střední dobou opravy $\frac{1}{\mu}$. Dále uvažujme, že

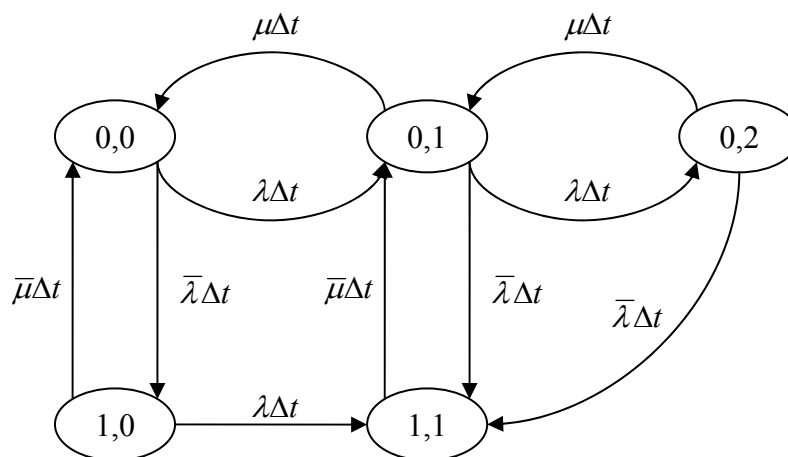
k poruše obslužné linky může dojít kdykoliv, tedy i během její nečinnosti. V případě, že dojde k poruše linky během obsluhy zákazníka, může dojít ke dvěma situacím:

- částečně obslužený zákazník se staví do fronty, pokud není fronta naplněna (v tomto případě nesmí ve frontě čekat žádný zákazník), po ukončení opravy linky začíná obsluha tohoto zákazníka znovu od začátku,
- částečně obslužený zákazník opouští systém neobslužen (čili je považován za odmítnutého), pokud při vzniku poruchy linky není volné místo ve frontě; v tomto případě, pokud je ve frontě právě 1 zákazník.

Uvažujme, že stav systému je vyjádřen ve tvaru i,j , kde i vyjadřuje počet linek v poruše a j počet zákazníků v systému. Je zřejmé, že uvažovaný systém se může nacházet pouze v následujících stavech:

- 0,0 - linka je v bezporuchovém stavu, systém je prázdný,
- 0,1 - linka obsluhuje zákazníka a fronta je prázdná,
- 0,2 - linka provádí obsluhu zákazníka a ve frontě čeká 1 zákazník (systém je plný),
- 1,0 - linka je v poruše, fronta je prázdná,
- 1,1 - linka je v poruše, ve frontě čeká zákazník (systém je plný).

Abychom mohli analyticky určit provozní charakteristiky (např. střední počet zákazníků v obsluze ES atd.) tohoto systému, musíme stanovit pravděpodobnosti jednotlivých stavů systému. Systém je za tímto účelem vhodné znázornit přechodovým grafem (viz obr. č. 1). Přechodový graf je z důvodu přehlednosti znázorněn bez smyček.



Obr. č. 1: Přechodový graf řešeného systému (bez smyček).

Na základě přechodového grafu z obr. č. 1 můžeme psát rovnice vyjadřující pravděpodobnosti jednotlivých stavů systému v čase $t + \Delta t$ a to:

$$P_{0,0}(t + \Delta t) = P_{0,0}(t) \cdot [1 - (\lambda + \bar{\lambda})\Delta t] + P_{0,1}(t) \cdot \mu\Delta t + P_{1,0}(t) \cdot \bar{\mu}\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P_{0,1}(t + \Delta t) = P_{0,0}(t) \cdot \lambda\Delta t + P_{0,1}(t) \cdot [1 - (\lambda + \mu + \bar{\lambda})\Delta t] + P_{0,2}(t) \cdot \mu\Delta t + P_{1,1}(t) \cdot \bar{\mu}\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P_{0,2}(t + \Delta t) = P_{0,1}(t) \cdot \lambda\Delta t + P_{0,2}(t) \cdot [1 - (\mu + \bar{\lambda})\Delta t] + o(\Delta t),$$

$$P_{1,0}(t + \Delta t) = P_{0,0}(t) \cdot \bar{\lambda}\Delta t + P_{1,0}(t) \cdot [1 - (\lambda + \bar{\mu})\Delta t] + o(\Delta t),$$

$$P_{1,1}(t + \Delta t) = P_{0,1}(t) \cdot \bar{\lambda}\Delta t + P_{1,0}(t) \cdot \lambda\Delta t + P_{1,1}(t) \cdot (1 - \bar{\mu}\Delta t) + P_{0,2}(t) \cdot \bar{\lambda}\Delta t + o(\Delta t).$$

Obecnými úpravami (viz např. [1]) lze získat soustavu diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, které popisují chování systému v závislosti na čase. Limitním

přechodem pro $t \rightarrow \infty$ potom získáme soustavu lineárních rovnic popisujících chování systému v podmínkách dlouhodobého provozu a to ve tvaru:

$$0 = -(\lambda + \bar{\lambda})P_{0,0} + \mu P_{0,1} + \bar{\mu}P_{1,0},$$

$$0 = \lambda P_{0,0} - (\lambda + \mu + \bar{\lambda})P_{0,1} + \mu P_{0,2} + \bar{\mu}P_{1,1},$$

$$0 = \lambda P_{0,1} - (\mu + \bar{\lambda})P_{0,2},$$

$$0 = \bar{\lambda}P_{0,0} - (\lambda + \bar{\mu})P_{1,0},$$

$$0 = \bar{\lambda}P_{0,1} + \lambda P_{1,0} - \bar{\mu}P_{1,1} + \bar{\lambda}P_{0,2}$$

s normovací podmínkou $P_{0,0} + P_{0,1} + P_{0,2} + P_{1,0} + P_{1,1} = 1$, která nám říká, že se systém může nacházet pouze v některém z pěti výše definovaných stavů.

Řešením této soustavy získáme stacionární pravděpodobnosti jednotlivých stavů systému, které potřebujeme pro výpočet provozních charakteristik. Zaměřme se nyní na dvě provozní charakteristiky a to:

- střední počet zákazníků v obsluze ES ,
- střední počet zákazníků ve frontě EL .

Na základě znalosti vztahu pro výpočet střední hodnoty diskrétní náhodné proměnné, kde náhodnou proměnnou je v tomto případě počet zákazníků v obsluze, resp. počet zákazníků ve frontě, můžeme pro střední počet zákazníků v obsluze ES psát:

$$ES = 0(P_{0,0} + P_{1,0} + P_{1,1}) + 1(P_{0,1} + P_{0,2}) = P_{0,1} + P_{0,2}$$

a pro střední počet zákazníků ve frontě EL :

$$EL = 0(P_{0,0} + P_{1,0} + P_{0,1}) + 1(P_{0,2} + P_{1,1}) = P_{1,1} + P_{0,2},$$

přičemž:
$$P_{0,1} = \frac{\lambda + \bar{\lambda} - B\bar{\mu}}{\mu} P_{0,0},$$

$$P_{0,2} = A \frac{\lambda + \bar{\lambda} - B\bar{\mu}}{\mu} P_{0,0},$$

$$P_{1,1} = \left[\frac{\lambda}{\bar{\mu}} B + \frac{(\bar{\lambda} + A\bar{\lambda})(\lambda + \bar{\lambda} - B\bar{\mu})}{\mu\bar{\mu}} \right] P_{0,0},$$

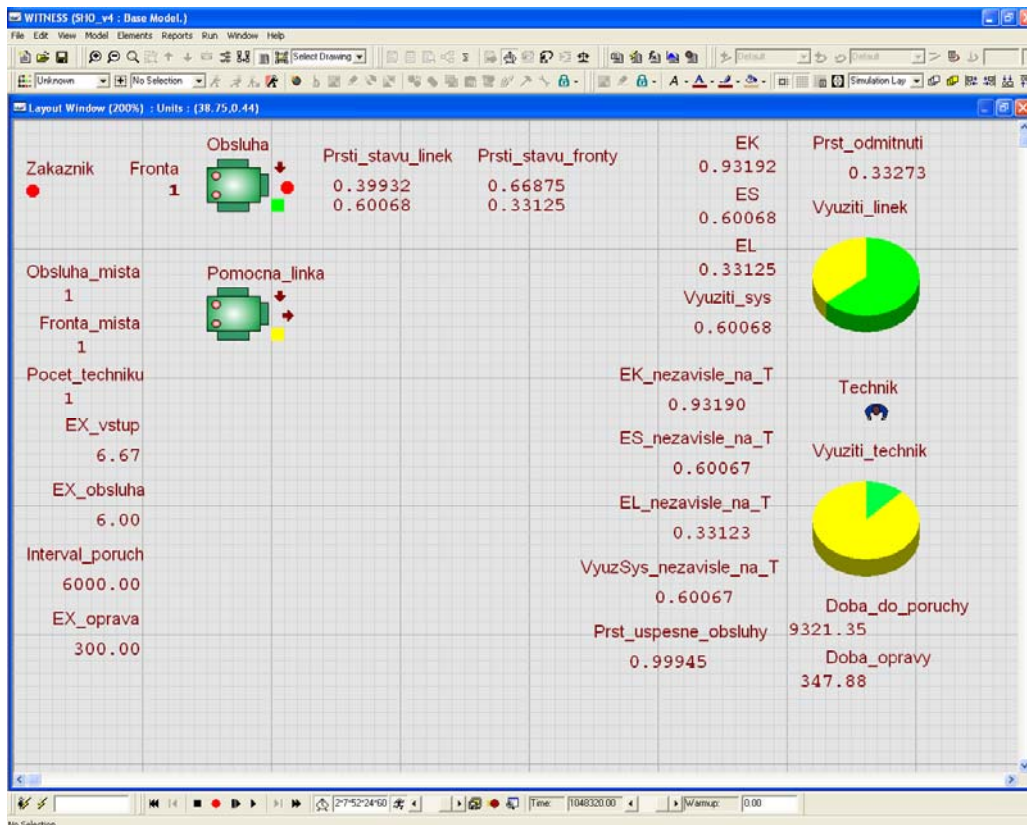
$$P_{0,0} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda + \bar{\lambda} - B\bar{\mu}}{\mu} + A \frac{\lambda + \bar{\lambda} - B\bar{\mu}}{\mu} + B + \frac{\lambda}{\bar{\mu}} B + \frac{(\bar{\lambda} + A\bar{\lambda})(\lambda + \bar{\lambda} - B\bar{\mu})}{\mu\bar{\mu}}}$$

a kde výrazy $A = \frac{\lambda}{\mu + \bar{\lambda}}$ a $B = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda + \bar{\mu}}$ jsme zavedli pro zjednodušení zápisu.

Na tomto příkladu vidíme, že analytické řešení tohoto systému je již poměrně obtížné.

3 Simulační model uvažovaného SHO

Simulační model tohoto systému je poměrně jednoduchý. Zákazníky přicházející k systému za účelem obsluhy je možno modelovat pomocí prvku „part“ (Zakaznik), frontu zákazníků čekajících na obsluhu pomocí prvku „buffer“ (Fronta) a linku provádějící obsluhu prvkem typu „machine“ (Obsluha). Součástí modelu jsou dále vstupní hodnoty (čili parametry - prvky typu „variable“), tyto hodnoty jsou při startu simulace načítány z externího souboru, kde lze tyto parametry SHO nastavovat (tedy bez nutnosti zásahu do simulačního modelu). Poslední velmi důležitou částí jsou simulační výstupy - číselné hodnoty (pravděpodobnosti jednotlivých stavů, pravděpodobnost odmítnutí atd.) nebo grafické výstupy prostřednictvím různých typů grafů (využití linek a využití technika provádějícího opravu linek). Tyto výstupy jsou také exportovány do externího souboru za účelem dalších analýz. Sestavený simulační model viz obr. č. 2.



Obr. č. 2: Ukázka sestaveného simulačního modelu.

Provozní charakteristiky uvažované v části 2 lze stanovit dvojím způsobem a to:

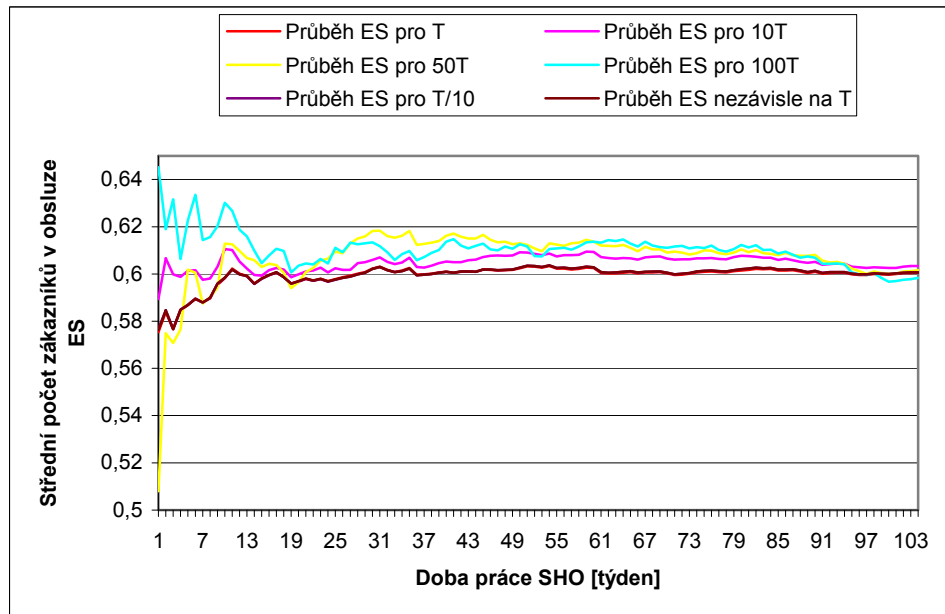
- pomocí vzorce pro výpočet střední hodnoty diskrétní náhodné veličiny na základě znalosti pravděpodobností jednotlivých stavů systému,
- pomocí vestavěných funkcí Witness (např. APARTS, AWIP).

V případě výpočtu prvním způsobem narážíme na drobné úskalí simulace SHO ve Witness. Witness je určen pro simulaci diskrétních systémů, neumožňuje tedy sledovat stav systému spojitě. Stav systému je nutno monitorovat, aby bylo možno stanovit pravděpodobnosti jednotlivých stavů systému. Při simulaci je nutno přistoupit ke sledování stavů systému v určitých předem definovaných časových intervalech T . Hodnotu tohoto intervalu je třeba volit vzhledem ke vstupním parametrům systému, neboť hodnota intervalu musí reflektovat, jak často dochází v systému ke změně stavu (tedy příchodu zákazníka nebo jeho odchodu buď z důvodu úspěšného ukončení obsluhy nebo z důvodu ukončení obsluhy způsobeného poruchou linky). Víme, že parametr vstupního toku λ charakterizuje, kolik zákazníků se průměrně uchází o obsluhu v systému za jednotku času. Analogicky parametr obsluhy μ udává, kolik zákazníků průměrně obslouží linka za jednotku času. Dále parametr vstupního toku poruch linek $\bar{\lambda}$ udává střední počet poruch za jednotku času a střední doba potřebná k odstranění poruchy je rovna $\frac{1}{\mu}$. Protože lze předpokládat, že hodnota $\bar{\lambda}$ je

zpravidla vzhledem k hodnotám λ a μ řádově menší (jinak řečeno četnosti změn systému vyvolané poruchou linky jsou mnohem nižší než četnosti změn vyvolané příchodem zákazníka, resp. odchodem řádně obslouženého zákazníka), je možno ji při stanovení intervalu vzorkování zanedbat. Můžeme tedy na základě výše uvedených zjednodušujících předpokladů konstatovat, že průměrný počet událostí, které nastanou v systému za jednotku času, je roven $\lambda + \mu$. Za předpokladu, že parametry λ a μ jsou vztaženy k časové jednotce [h], potom výraz

$$T = \frac{60}{\lambda + \mu} \text{ [min]}$$

představuje průměrný interval mezi výskytem událostí v [min], tuto hodnotu je vhodné zvolit jako interval vzorkování. Na obr. č. 3 je ukázána závislost středního počtu zákazníků v obsluze ES na čase při různých hodnotách intervalu vzorkování T .



Obr. č. 3: Ukázka závislosti ES na intervalu vzorkování T

Z obr. č. 3 vidíme, že průběhy ES pro $T/10$ a T jsou prakticky totožné a v podstatě kopírují průběh ES nezávislého na T . Naopak průběh ES pro $100T$ se již poměrně odlišuje, nicméně lze z něj usoudit, že se po dostatečně dlouhé době simulace práce systému taktéž přibližuje průběhům odpovídajícím nižší hodnotě intervalu vzorkování T , resp. průběhu ES nezávislého na T .

4 Komparace analytických a simulačních výsledků

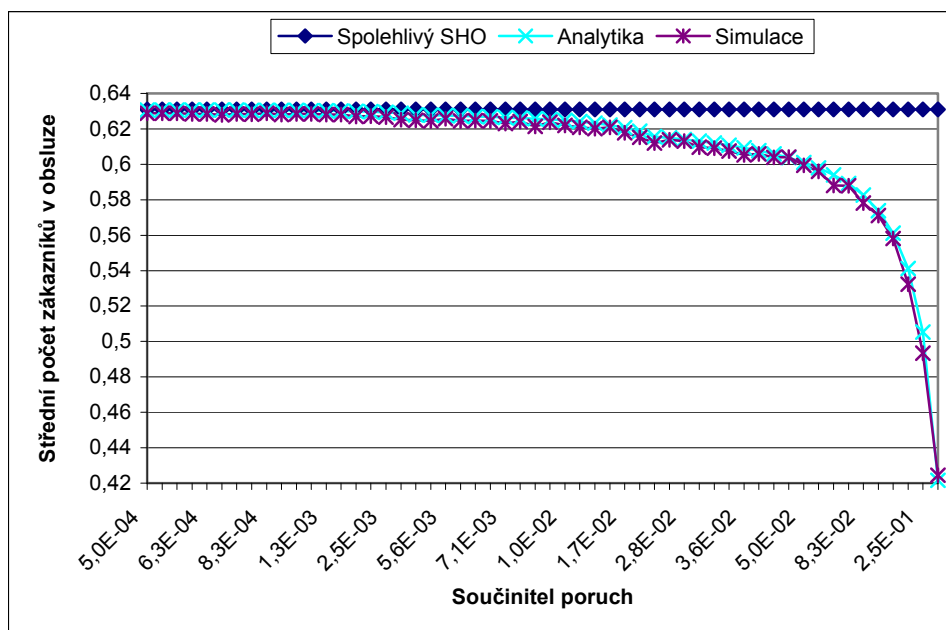
Za účelem komparace analytických výsledků se simulačními byly s uvažovaným systémem provedeny experimenty s parametry $\lambda = 9 \text{zák} \cdot \text{h}^{-1}$ a $\mu = 10 \text{zák} \cdot \text{h}^{-1}$. Parametr opravy linky $\bar{\mu}$ činil $\bar{\mu} = 0,2 \text{linka} \cdot \text{h}^{-1}$ (střední doba opravy linky tedy činila 5 h).

Střední doba mezi poruchami $\frac{1}{\lambda}$ byla postupně skokově měněna následujícím způsobem:

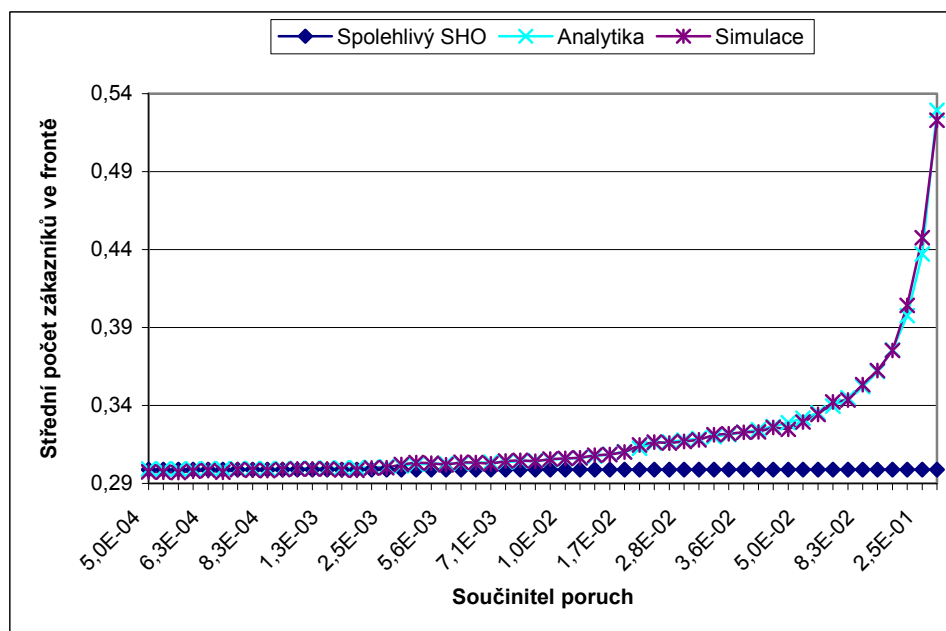
- z maximální hodnoty $10000 \text{h} \cdot \text{por}^{-1}$ na hodnotu $1000 \text{h} \cdot \text{por}^{-1}$ se skokem 500,
- z hodnoty $1000 \text{h} \cdot \text{por}^{-1}$ na hodnotu $200 \text{h} \cdot \text{por}^{-1}$ se skokem 50,
- z hodnoty $200 \text{h} \cdot \text{por}^{-1}$ na minimální hodnotu $10 \text{h} \cdot \text{por}^{-1}$ se skokem 10.

Pro potřeby vyhodnocení jednotlivých experimentů byl zaveden součinitel poruch $\bar{\rho}$ definovaný jako $\bar{\rho} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}}$. Výsledkem vykonaných experimentů jsou potom grafy závislosti

středního počtu zákazníků v obsluze ES a středního počtu zákazníků ve frontě EL na součiniteli poruch $\bar{\rho}$ (viz obr. č. 4 a 5). Simulace byla vždy provedena na dobu 2 let práce SHO.



Obr. č. 4: Závislost ES na součiniteli poruch $\bar{\rho}$.



Obr. č. 5: Závislost EL na součiniteli poruch $\bar{\rho}$.

Z obou grafů lze vidět, že průběhy ES , resp. EL získané analyticky a simulací jsou velmi podobné, můžeme tedy říct, že simulací byla potvrzena správnost analytického modelu. Pro srovnání je v obou grafech doplněn průběh příslušné provozní charakteristiky odpovídající spolehlivému SHO (průběhy jsou konstantní, protože nezávisí na hodnotě $\bar{\rho}$).

5 Závěr

Na jednoduchém příkladě nespolehlivého Markovova systému hromadné obsluhy byly konfrontovány analytické výsledky získané řešením matematického modelu uvažovaného systému s výsledky získané simulací tohoto systému. Z provedených experimentů vyplynulo, že rozdíly ve výsledcích jsou zanedbatelné. Analytické řešení tohoto systému je sice realizovatelné, nicméně již poměrně komplikované. V případě, že bychom uvažovali složitější nespolehlivý SHO (více linek, více míst ve frontě), byl by matematický model podstatně

složitější a k jeho řešení by bylo nutno použít vhodný software (např. Matlab). Simulací ve Witness bychom požadovaných výsledků dosáhli podstatně rychleji a snadněji; stačilo by upravit vstupy úlohy (počet linek, počet míst ve frontě apod.) a můžeme úlohu simulovat.

Použitá literatura

- [1] KLUVÁNEK, P. - BRANDALÍK, F. Operační analýza I. Bratislava: ALFA Bratislava, 1. vyd., 1982.
- [2] UNČOVSKÝ, L. Stochastické modely operačnej analýzy. Bratislava: ALFA Bratislava, 1. vyd., 1980.

Kontaktní informace

Ing. Michal Dorda, VŠB - TU Ostrava, Fakulta strojní, Institut dopravy, 17. listopadu 15, 708 33 Ostrava - Poruba, telefon: 597 325 755, e-mail: m.dorda@seznam.cz