

INTERVALY SPOĽAHLIVOSTI A PREDIKČNÉ INTERVALY PRI EXPERIMENTOVANÍ V SYSTÉME WITNESS

Ing. Vladimír Jerz, PhD.

Ústav výrobných systémov, environmentálnej techniky a manažmentu kvality
Strojnícka fakulta STU Bratislava

Kľúčové slová: simulácia, Witness, Optimizer, Scenario Manager, interval spoľahlivosti, predikčný interval

1. Úvod

Simulačné modely sú vo všeobecnosti využívané na rôzne ciele pri analýze, syntéze alebo identifikácii reálnych objektov a situácií. Veľmi časté je porovnávanie dvoch alebo niekoľkých variantov z hľadiska určitej sledovanej výstupnej veličiny. Nasledujúce úvahy sa týkajú problematiky posúdenia spoľahlivosti tvrdenia, že určitý variant riešenia je „lepší“ ako iný určitý variant.

2. Intervaly spoľahlivosti a predikčné intervaly

Hodnotu výstupnej veličiny y_i možno vyjadriť pomocou bodových odhadov alebo intervalových odhadov. Šírka intervalového odhadu je zároveň mierou chyby (nepresnosti) bodového odhadu.

Na vyjadrenie výsledkov vyhodnotenia simulačných experimentov alebo ich postupností sa často používajú priemerné hodnoty. V prípade vyhodnocovania postupnosti k diskrétnych hodnôt sa vypočítajú pomocou vzťahu

$$\mu_i = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_{ij} .$$

V prípade symetrického rozloženia sledovanej výstupnej veličiny okolo jej priemernej hodnoty je postačujúcou doplnkovou informáciou štandardná odchýlka alebo výberový rozptyl hodnôt tejto veličiny. V prípade nesymetrického rozloženia je niekedy výhodnejšie použiť medián (50% kvantil), alebo kvantily, ktoré udávajú hraničné hodnoty pre rôzne pravdepodobnosti. Poskytnutie prehľadnej informácie potom umožňuje vizualizácia uvedených výsledkov formou empirickej distribučnej funkcie alebo histogramu početností.

Účelom simulácie býva odhadnúť, aké hodnoty bude nadobúdať určitá veličina v reálnych podmienkach. Môže ísť napríklad o počet vyrobených výrobkov za 1 deň. Ak ide o náhodnú veličinu, môže tento počet kolísať okolo určitej hodnoty. Ak je z hľadiska riadenia výroby dôležité len to, koľko výrobkov bude vyrobených za určité dlhšie obdobie, môže byť postačujúcim aj taký údaj, ako je priemerná (stredná) hodnota a interval spoľahlivosti v ktorom sa so zadanou pravdepodobnosťou táto hodnota nachádza. Ak ale je dôležité, koľko výrobkov bude vyrobených za určitý konkrétny deň, nebude takáto charakteristika postačujúca. Simuláciou zistené počty výrobkov za jednotlivé dni budú $(y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ik})$. Predpokladáme, že pre uvedené hodnoty je charakteristické normálne rozdelenie. Výberový rozptyl možno vypočítať podľa vzťahu

$$S_i^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^k (y_{ij} - \mu_i)^2 .$$

Hranice *intervalu spoľahlivosti* pre uvedenú veličinu možno vypočítať pomocou vzťahu

$$\mu_i \pm u \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{S_i}{\sqrt{k}} ,$$

kde $u\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ znamená $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\%$ -ný kvantil uvažovaného rozdelenia pravdepodobnosti (pri Studentovom rozdelení pre $k-1$ stupňov voľnosti). Vopred zvolenému číslu α hovoríme *hladina významnosti* a v praxi sa najčastejšie volí hodnota 0,01 alebo 0,05, čo zodpovedá pravdepodobnosti 99 alebo 95%, že vyhodnocovaná náhodná veličina je z nájdeného intervalu. Treba však poznamenať, že takto vypočítaný interval spoľahlivosti udáva v akom intervale sa so zadanou pravdepodobnosťou nachádza skutočná stredná hodnota sledovanej veličiny. Zo vzťahu je zrejmé, že s rastúcim k sa interval zužuje, čo znamená, že presnosť stanovenia strednej hodnoty je priamo úmerná rozsahu súboru vyhodnocovaných hodnôt. Z hľadiska praktických potrieb je niekedy dôležitejší interval, v ktorom sa bude s určitou pravdepodobnosťou nachádzať sledovaná veličina (nie jej stredná hodnota) – *predikčný interval*. V uvedenom príklade je to napríklad údaj, ktorý hovorí koľko výrobkov bude vyrobených s určitou zadanou pravdepodobnosťou v konkrétnom dni. Predikčný interval možno považovať za *mieru rizika*, zatiaľ čo interval spoľahlivosti je *mierou chyby*. Hranice predikčného intervalu možno vypočítať pomocou vzťahu

$$\mu_i \pm u\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot S_i \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{k}}.$$

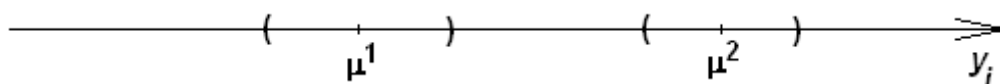
Je zrejmé, že na rozdiel od intervalu spoľahlivosti, jeho šírka nekonverguje k nule. [1, 2, 3]

3. Porovnávací analýza dvoch modelov

Jedným z dôvodov použitia simulácie môže byť zámer porovnať správanie sa dvoch alebo viacerých návrhov systémov z hľadiska určitých sledovaných výstupných veličín. Najjednoduchším prípadom bude porovnanie dvoch návrhov z hľadiska jednej sledovanej výstupnej veličiny. Ak ide napríklad o veličinu, ktorá má dosahovať z hľadiska požadovaných parametrov systému čo najväčšiu (alebo prípadne čo najmenšiu) hodnotu, môže byť otázka formulovaná takto: Treba určiť s akou pravdepodobnosťou je návrh 1 lepší ako návrh 2.

Predpokladáme, že sledovaná veličina (v prípade oboch návrhov) je náhodnou veličinou s určitými parametrami (stredné hodnoty, rozptyly, intervaly spoľahlivosti, predikčné intervaly, typ rozdelenia pravdepodobnosti, tvary empirickej distribučnej funkcie alebo histogramu početností, ...).

Rovnako ako v prípade analýzy jedného modelu možno pre oba varianty vytvoriť predikčné intervaly (obr. 1). Ak pri nezanedbateľnej hladine významnosti sú takto vytvorené intervaly dostatočne vzdialené (neprekrývajú sa a je medzi nimi určitá vzdialenosť), možno s dostatočnou spoľahlivosťou rozhodnúť o tom, ktorý variant je výhodnejší. Teoreticky však i tu môže nastať situácia, že v konkrétnom prípade sa môže variant, ktorý sa javí pri porovnaní stredných hodnôt sledovanej výstupnej veličiny ako výhodnejší, prejavíť ako nevýhodnejší.

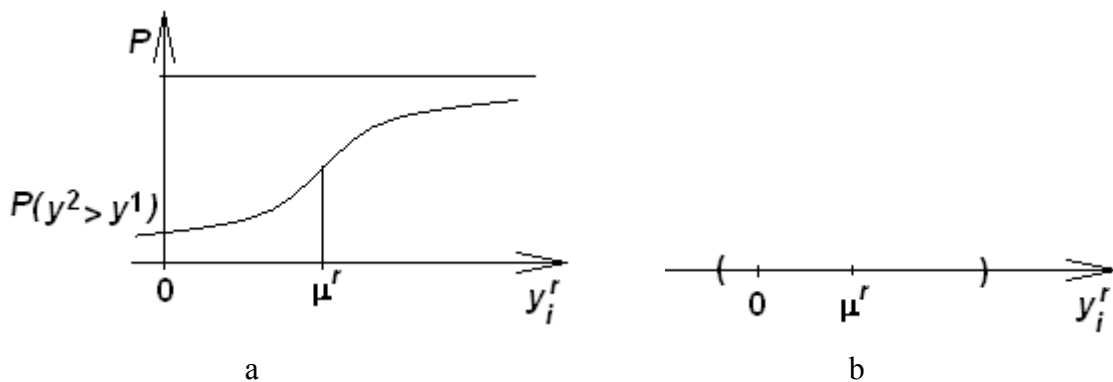


Obr. 1: Predikčné intervaly pre 2 modely

Menej jednoznačná situácia nastane, ak sa predikčné intervaly čiastočne prekrývajú. V takom prípade je výhodné určiť pravdepodobnosť toho, že jeden z variantov je z hľadiska uvažovanej výstupnej veličiny výhodnejší ako druhý. Prakticky vhodný a pomerne nenáročný spôsob určenia tejto pravdepodobnosti predpokladá vytvorenie nového štatistického súboru v rámci spracovania výsledkov postupnosti simulačných experimentov (behov) s modelmi oboch variantov. S modelom každého z oboch variantov modelu vykonáme postupnosť k experimentov s rôznymi prúdmi náhodných čísel na generovanie náhodných veličín.

Dostaneme 2 postupnosti hodnôt sledovanej výstupnej veličiny $(y^{1_{i1}}, y^{1_{i2}}, \dots, y^{1_{ik}})$ a $(y^{2_{i1}}, y^{2_{i2}}, \dots, y^{2_{ik}})$ (symboly umiestnené vpravo hore nie sú mocniny, ale indexy). Vytvoríme postupnosť $(y^{r_{i1}}, y^{r_{i2}}, \dots, y^{r_{ik}})$, ktorej členy sú vypočítané ako rozdiely zodpovedajúcich členov pôvodných postupností: $y^{r_{ij}} = y^{1_{ij}} - y^{2_{ij}}$. Štatistickým spracovaním tejto postupnosti možno získať distribučnú funkciu (obr. 2a) aj predikčný interval (obr. 2b), ale prakticky postačujúce a výhodné je vytvorenie empirickej distribučnej funkcie, alebo dokonca len rozdelenie štatistického súboru na 2 podmnožiny – jednu, ktorá bude obsahovať prvky $y^{r_{ij}} < 0$ a druhú, ktorá bude obsahovať prvky $y^{r_{ij}} > 0$ (polovicu z prvkov, pre ktoré platí $y^{r_{ij}} = 0$ môžeme zaradiť do jednej podmnožiny, polovicu do druhej). Z hľadiska určenia pravdepodobnosti, že jeden variant modelu je z hľadiska sledovanej výstupnej veličiny výhodnejší ako druhý, sú dôležité počty prvkov v jednotlivých podmnožinách n_1 a n_2 . Pravdepodobnosť, že variant 1 je výhodnejší ako variant 2 určíme ako pomer $\frac{n_1}{n_1 + n_2}$

v prípade, že výhodnejšia je čo najnižšia hodnota y_i , alebo $\frac{n_2}{n_1 + n_2}$ v prípade, že výhodnejšia je čo najvyššia hodnota y_i .



Obr. 2: Distribučná funkcia a predikčný interval

Z podstaty uvedenej metódy vyplýva, že interval, zobrazený na obr. 2 b je **predikčným intervalom** v zmysle uvedenej definície, preto jeho šírka zväčšovaním počtu pokusov (alebo, podľa charakteru experimentov, predĺžovaním dĺžky simulačných behov) nekonverguje k nule, avšak spoľahlivosť určenia strednej hodnoty μ^r sa tým zvyšuje.

4. Experimentálne overenie

Na praktické overenie a prezentovanie vhodnosti uvedených postupov bol vytvorený jednoduchý simulačný model. Cieľom experimentovania s modelom bolo optimalizovať počet pracovníkov vo výrobnom systéme, pričom kritériom bolo dosiahnutie maximálneho zisku (Z). Každý pracovník je zaradený do jednej z troch skupín (kontrolóri, nastavovači, natierači). Sledovaný výstupný parameter – zisk je vyčíslený v účelovej funkcii a závisí od počtu vyrobených výrobkov, počtu vyprodukovaných nepodarkov a počtov pracovníkov jednotlivých skupín. Vstupnými parametrami, ktoré vstupujú do optimalizácie sú počty pracovníkov v jednotlivých skupinách n_k, n_s, n_n . Pracovníkov, ktorí môžu vykonávať kontrolu alebo natieranie je k dispozícii maximálne 12.

V prvej fáze riešenia bola s využitím modulu Optimizer hľadaná optimálna kombinácia hodnôt n_k, n_s, n_n . Keďže bolo overovaných veľa kombinácií, pre každú kombináciu bolo urobených len 5 replikácií. Z tab. 1 je zrejmé, že najlepšie kombinácie boli dosiahnuté pre $n_k \in \langle 6,7 \rangle, n_s \in \langle 2,4 \rangle, n_n \in \langle 3,4 \rangle$.

V druhej fáze boli zúžené intervaly prípustných hodnôt jednotlivých vstupných parametrov, čo umožnilo bez predĺženia času experimentovania zvýšiť počet replikácií pre každú kombináciu na 100. Výrazne sa tým zvýšila spoľahlivosť určenia strednej hodnoty účelovej funkcie (zúžili sa intervaly spoľahlivosti). Výsledky sú v tab. 2. Vidno, že poradie výhodnosti kombinácií sa čiastočne zmenilo, i keď poradie najlepších dvoch kombinácií sa potvrdilo.

Tabuľka 1

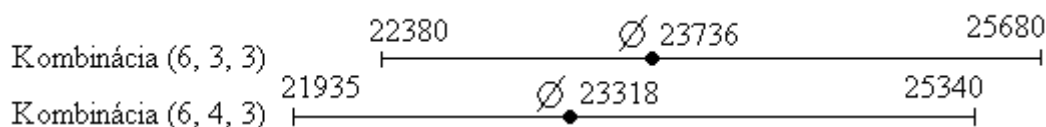
Kombinácia	Z	n_k	n_s	n_n
169	23928	6	3	3
175	23579	6	4	3
170	23404	6	3	4
197	23401	7	3	3
163	23278	6	2	3
202	23127	7	4	3
176	23127	6	4	4
198	22997	7	3	4
192	22946	7	2	3

Tabuľka 2

Kombinácia	Z	n_k	n_s	n_n
2	23726	6	3	3
4	23302	6	4	3
0	23270	6	2	3
3	23260	6	3	4
8	23247	7	3	3
10	22873	7	4	3
5	22855	6	4	4
1	22826	6	2	4
9	22800	7	3	4

Ďalšie úvahy budú smerovať k určeniu spoľahlivosti tvrdenia, že kombinácia (6, 3, 3) je „lepšia“ ako kombinácia (6, 4, 3). Na tento účel bol použitý modul Scenario Manager. S každým z uvedených variantov bolo vykonaných 100 replikácií. Časť tabuľky, v ktorej boli zhromaždené a vyhodnocované výsledky je v tab. 3. Hodnoty sa odlišujú od hodnôt v tabuľkách 1 a 2 preto, lebo modul Scenario Manager využíval pri experimentovaní iné prúdy náhodných čísel ako modul Optimizer.

Z výsledkov je zrejmé, že intervaly, v ktorých sa nachádzajú hodnoty účelovej funkcie zo 100 replikácií porovnávaných kombinácií sa navzájom prekrývajú (obr. 3). Až v 26% replikácií pri pokusoch s „horším“ variantom je hodnota účelovej funkcie – zisku väčšia ako priemerná hodnota účelovej funkcie „lepšieho“ variantu.



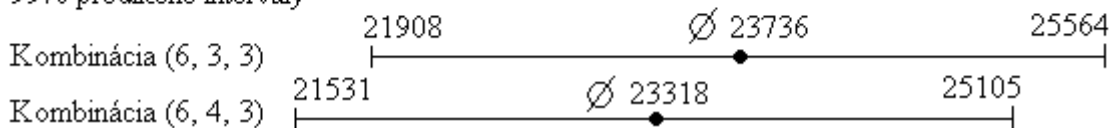
Obr. 3: Intervaly, v ktorých sa nachádzali hodnoty účelovej funkcie

Podľa vyššie uvedených vzťahov boli vypočítané aj hranice 99% intervalov spoľahlivosti a hranice 99% predikčných intervalov pre obe uvedené kombinácie (obr. 4).

99% intervaly spoľahlivosti



99% predikčné intervaly



Obr. 4: Intervaly spoľahlivosti a predikčné intervaly

Tabuľka 3

Kombinácia (6, 3, 3)		
Repl.	Z ₁	(Z ₁ - ØZ ₁) ²
1	24075	114819
2	23685	2616
3	23775	1509
4	23805	4740
5	24360	389189
6	23400	112997
7	23250	236342
8	22770	933446
9	22470	1603136
10	23835	9771
11	23985	61926
12	24735	997701
13	24105	136050
14	24780	1089623
15	24420	467651
16	23730	38
17	25020	1648271
18	23985	61926
19	23820	7031
20	24225	238974
:	:	:
100	24750	1027892
	Priemer:	Súčet:
	23736	47362543
Minimum:	22380	
Maximum:	25680	
	S ₁	691.67154
	odch. IS	181.90962
	odch. PI	1828.169
	Ø+IS	23918
	Ø-IS	23554
	Ø+PI	25564
	Ø-PI	21908

Kombinácia (6, 4, 3)		
Repl.	Z ₂	(Z ₂ - ØZ ₂) ²
1	23735	173889
2	23465	21609
3	23315	9
4	23225	8649
5	24020	492804
6	23060	66564
7	22430	788544
8	22535	613089
9	22010	1710864
10	23495	31329
11	23645	106929
12	24275	915849
13	23765	199809
14	24320	1004004
15	24080	580644
16	23750	186624
17	24560	1542564
18	23765	199809
19	23480	26244
20	23885	321489
:	:	:
100	24050	535824
	Priemer:	Súčet:
	23318	45251550
Minimum:	21935	
Maximum:	25340	
	S ₂	676.0816
	odch. IS	177.8095
	odch. PI	1786.963
	Ø+IS	23496
	Ø-IS	23140
	Ø+PI	25105
	Ø-PI	21531

Z ₁ -Z ₂	Z ₂ -ØZ ₁
340	-1
220	-271
460	-421
580	-511
340	284
340	-676
820	-1306
235	-1201
460	-1726
340	-241
340	-91
460	539
340	29
460	584
340	344
-20	14
460	824
220	29
340	-256
340	149
:	:
700	314

Správnosť výsledkov výpočtov potvrdili aj výstupné údaje z vyhodnotenia pomocou modulu Scenario Manager, ktorý však neposkytuje hranice predikčných intervalov (obr. 5).

Mean	23736.15	Mean	23318.00
Count	100	Count	100
Min	22380.00	Min	21935.00
Max	25680.00	Max	25340.00
Std. Dev	691.67	Std. Dev	676.08
Confidence Level 99% Minimum	23553.96	Confidence Level 99% Minimum	23139.92
Confidence Level 99% Maximum	23918.34	Confidence Level 99% Maximum	23496.08
Confidence Level 95% Minimum	23598.71	Confidence Level 95% Minimum	23183.66
Confidence Level 95% Maximum	23873.59	Confidence Level 95% Maximum	23452.34
Confidence Level 90% Minimum	23621.09	Confidence Level 90% Minimum	23205.53
Confidence Level 90% Maximum	23851.21	Confidence Level 90% Maximum	23430.47

Obr. 5: Výstupy z modulu Scenario Manager

Spôľahlivosť tvrdenia, že kombinácia (6, 3, 3) je z dlhodobého hľadiska optimálna, je pri danom počte replikácií vysoká. Dokazujú to neprekrývajúce sa 99% intervaly spoľahlivosti oboch porovnávaných variantov. Vidno však, že predikčné intervaly porovnávaných variantov sa výrazne prekrývajú (a možno predpokladať, že sa budú prekrývať aj s predikčnými intervalmi niektorých ešte „horších“ variantov), čo znamená, že pre konkrétny simulovaný interval by mohla viesť „nevýhodnejšia“ kombinácia k lepšej hodnote účelovej funkcie s pomerne veľkou pravdepodobnosťou.

Použitím vyššie opísaného postupu pri porovnávej analýze dvoch modelov možno určiť pravdepodobnosť, že v konkrétnom simulovanom intervale je kombinácia (6, 3, 3) výhodnejšia ako kombinácia (6, 4, 3). Týmto postupom bolo zistené, že táto pravdepodobnosť je až 99%. Na prvý pohľad to vyzerá tak, že tento výsledok je v rozpore so zistením, že predikčné intervaly sa výrazne prekrývajú. V skutočnosti možno považovať výsledok za pravdivý, pretože použitá metóda na určenie pravdepodobnosti vychádza z predpokladu, že sa porovnávajú zodpovedajúce si replikácie z jednotlivých variantov. Keďže bol uplatnený princíp, že v týchto porovnávaných pároch sú použité rovnaké prúdy náhodných čísiel na generovanie náhodných veličín v modeli, je prirodzené, že pravdepodobnosť väčšej výhodnosti kombinácie (6, 3, 3) je vysoká.

Je všeobecne známe odporúčanie používať pri porovnávaní variantov rovnaké prúdy náhodných čísiel na rovnaký účel (ak je to možné). Z vykonaného experimentu vyplýva, že je mimoriadne vhodné aj v prípade realizácie veľkého počtu replikácií na elimináciu vplyvu náhodných veličín v modeloch použiť metódu, ktorá navzájom porovnáva replikácie, využívajúce rovnaké prúdy náhodných čísiel na rovnaký účel.

Užívatelia softvérových systémov na simuláciu a podporných prostriedkov v niektorých prípadoch nemusia vedieť, či konkrétny systém zabezpečí, že postupnosti replikácií porovnávaných variantov používajú rovnaké prúdy náhodných čísiel na simuláciu navzájom si zodpovedajúcich replikácií. Realizáciou podobného experimentu ako tu bol uvedený možno získať odpoveď na túto otázku.

Príspevok bol vytvorený v rámci riešenia výskumnej úlohy VEGA 1/4114/07 Projekt počítačom podporovaného systému na projektovanie, prevádzku a simuláciu výrobných a logistických úloh strojárskych automatizovaných výrobných.

Literatúra:

- [1] Banks, J., Carson II, J.S., Nelson, B.L., Nicol, D.M.: Discrete-Event System Simulation. Pearson Prentice Hall 2005. 608 s., ISBN 0-13-129342-7
- [2] Hátle, J., Likeš, J.: Základy počtu pravdepodobnosti a matematické statistiky. Praha: SNTL/Alfa 1974
- [3] Potocký, R., Kalas, J., Komorník, J., Lamoš, F.: Zbierka úloh z pravdepodobnosti a matematickej štatistiky. Bratislava: Alfa/SNTL 1986

Kontaktné údaje:

Ing. Vladimír Jerz, PhD.

Ústav výrobných systémov, environmentálnej techniky a manažmentu kvality

Strojnícka fakulta STU Bratislava

Námestie slobody 17; 81231 Bratislava

Tel.: +421 2 57296554

E-mail: vladimir.jerz@stuba.sk